Getal & Ruimte

Uitwerkingen

3 vwo deel 1

Dertiende editie, 2023

Noordhoff Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak
L. S. Kuijt-Smit
C. van Vliet

Inhoud

1 Lineaire problemen

Voorkennis Herleiden

Bladzijde 10

1
a $5x + 7x = 12x$
b $5x - x = 4x$
c $5x - 5x = 0$
d $3a - 12a = -9a$
e $2a + 6 - 3a - 12 = -a - 6$
f $5a + 8 - 8a - 10 = -3a - 2$

2
a $2a - 6b - 2a - b = -7b$
b $3p - 8q - 2p + 7q = p - q$
c $5y - 3 - 3 - y = 4y - 6$
d $-2n - 8m + 7n - 6n = -n - 8m$

3
a $6(5x - 1) = 30x - 6$
b $-3(5 - 2x) = -15 + 6x$
c $-8(3x + 2) = -24x - 16$
d $(x + 5)(x + 3) =$
$x^2 + 3x + 5x + 15 =$
$x^2 + 8x + 15$
e $(x + 3)(x - 1) =$
$x^2 - x + 3x - 3 =$
$x^2 + 2x - 3$
f $(2x - 4)(x - 6) =$
$2x^2 - 12x - 4x + 24 =$
$2x^2 - 16x + 24$

4
a $5(x - 4) - 2(x - 10) =$
$5x - 20 - 2x + 20 =$
$3x$
b $3x - 7 - 3(6 + x) =$
$3x - 7 - 18 - 3x =$
-25
c $5(x - 8) - 3(2x - 7) =$
$5x - 40 - 6x + 21 =$
$-x - 19$
d $3x - 2(x - 3) =$
$3x - 2x + 6 =$
$x + 6$
e $(3x - 2)(x - 3) =$
$3x^2 - 9x - 2x + 6 =$
$3x^2 - 11x + 6$
f $(2x - 3)(x - 1) - 5x =$
$2x^2 - 2x - 3x + 3 - 5x =$
$2x^2 - 10x + 3$

1.1 Lineaire vergelijkingen

Bladzijde 11

1
a $5x - 3 = 3x + 5$
$2x - 3 = 5$
$2x = 8$
$x = 4$
b $7x + 1 = 4x - 8$
$3x + 1 = -8$
$3x = -9$
$x = -3$
c $2x - 5 = 6x + 3$
$-4x - 5 = 3$
$-4x = 8$
$x = -2$
d $2x - 2 = 3x - 7$
$-x - 2 = -7$
$-x = -5$
$x = 5$

Bladzijde 12

2
a $2x - 5 = 5x - 8$
$-3x = -3$
$x = 1$
b $4x - 4 = 6 + 8x$
$-4x = 10$
$x = -2\frac{1}{2}$
c $3x + 2x = -x - 12$
$5x = -x - 12$
$6x = -12$
$x = -2$
d $-y - 1 = -2y + 5$
$y = 6$

3
a $3x - 5 = 5x - 7$
$-2x = -2$
$x = 1$
b $7(x - 1) = 6x + 3$
$7x - 7 = 6x + 3$
$x = 10$
c $4x - 4 = 5(x - 1)$
$4x - 4 = 5x - 5$
$-x = -1$
$x = 1$
d $3(x - 1) + 3 = 5x$
$3x - 3 + 3 = 5x$
$3x = 5x$
$-2x = 0$
$x = 0$

4 **a** $6 - 5(t-1) = 2t - 3(t+1)$
$6 - 5t + 5 = 2t - 3t - 3$
$11 - 5t = -t - 3$
$-4t = -14$
$t = 3\frac{1}{2}$

b $-(a-1) = -3a + 5(1+a)$
$-a + 1 = -3a + 5 + 5a$
$-a + 1 = 2a + 5$
$-3a = 4$
$a = -1\frac{1}{3}$

c $4(x-1) = 8 - 2(2-x)$
$4x - 4 = 8 - 4 + 2x$
$4x - 4 = 4 + 2x$
$2x = 8$
$x = 4$

d $9 - 3(x+2) = 5(x-3)$
$9 - 3x - 6 = 5x - 15$
$3 - 3x = 5x - 15$
$-8x = -18$
$x = 2\frac{1}{4}$

L1 **a** $3(x+1) = 5(x-3)$
$3x + 3 = 5x - 15$
$-2x = -18$
$x = 9$

b $4(x-2) + x = 8x + 10$
$4x - 8 + x = 8x + 10$
$5x - 8 = 8x + 10$
$-3x = 18$
$x = -6$

5 **a** Veelvouden van 6 zijn 6, 12, …
12 is ook een veelvoud van 4, dus kgv(4, 6) = 12.
$\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{6}x - 1$
$12 \cdot \frac{1}{4}x + 12 \cdot 2 = 12 \cdot \frac{1}{6}x - 12 \cdot 1$
$3x + 24 = 2x - 12$
$x = -36$

b Veelvouden van 5 zijn 5, 10, 15, 20, 25, 30, …
30 is ook een veelvoud van 2 en 3, dus kgv(2, 3, 5) = 30.
$\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{2} = \frac{2}{5}x - 1$
$30 \cdot \frac{1}{3}x - 30 \cdot 1\frac{1}{2} = 30 \cdot \frac{2}{5}x - 30 \cdot 1$
$10x - 45 = 12x - 30$
$-2x = 15$
$x = -7\frac{1}{2}$

Bladzijde 13

6 $12 \cdot \frac{2}{3}x - 12 \cdot 3 = 12 \cdot \frac{3}{4}(x-6)$
$8x - 36 = 9(x-6)$
$8x - 36 = 9x - 54$
$-x = -18$
$x = 18$
Dus Elena heeft gelijk.
$12 \cdot \frac{2}{3}x - 12 \cdot 3 = 12 \cdot \frac{3}{4}(12 \cdot x - 12 \cdot 6)$
$8x - 36 = 9(12x - 72)$
$8x - 36 = 108x - 648$
$-100x = -612$
$x = 6{,}12$
Dus Joris heeft geen gelijk.

Bladzijde 14

7 **a** $\frac{1}{2}x - 1 = 5 + \frac{1}{4}x$
$4 \cdot \frac{1}{2}x - 4 \cdot 1 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot \frac{1}{4}x$
$2x - 4 = 20 + x$
$x = 24$

b $\frac{1}{4}x + 1 = -3 + \frac{1}{3}x$
$12 \cdot \frac{1}{4}x + 12 \cdot 1 = 12 \cdot -3 + 12 \cdot \frac{1}{3}x$
$3x + 12 = -36 + 4x$
$-x = -48$
$x = 48$

c $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}x$
$10 \cdot \frac{1}{5}x - 10 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot 3 - 10 \cdot \frac{1}{2}x$
$2x - 5 = 30 - 5x$
$7x = 35$
$x = 5$

d $\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{8} = 1\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$
$8 \cdot \frac{3}{4}x - 8 \cdot 1\frac{1}{8} = 8 \cdot 1\frac{3}{8}x + 8 \cdot \frac{7}{8}$
$6x - 9 = 11x + 7$
$-5x = 16$
$x = -3\frac{1}{5}$

8 **a** $-\frac{1}{3}x + 10 = \frac{1}{2}x$

$6 \cdot -\frac{1}{3}x + 6 \cdot 10 = 6 \cdot \frac{1}{2}x$

$-2x + 60 = 3x$

$-5x = -60$

$x = 12$

b $\frac{2}{5}x - 7\frac{1}{4} = 2x + \frac{3}{4}$

$20 \cdot \frac{2}{5}x - 20 \cdot \frac{29}{4} = 20 \cdot 2x + 20 \cdot \frac{3}{4}$

$8x - 145 = 40x + 15$

$-32x = 160$

$x = -5$

c $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - 2) + 2$

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 2$

$12 \cdot \frac{3}{4}x + 12 \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot \frac{1}{3}x - 12 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot 2$

$9x + 6 = 4x - 8 + 24$

$9x + 6 = 4x + 16$

$5x = 10$

$x = 2$

d $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{3}(x + 2)$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{3}x + 6 \cdot \frac{2}{3}$

$3x + 3 = 2x + 4$

$x = 1$

9 **a** $\frac{1}{4}(3x - 2) - \frac{1}{4} = 3(\frac{1}{6} - x) - 5$

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - 3x - 5$

$4 \cdot \frac{3}{4}x - 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 3x - 4 \cdot 5$

$3x - 2 - 1 = 2 - 12x - 20$

$3x - 3 = -18 - 12x$

$15x = -15$

$x = -1$

b $\frac{1}{6}t - 2 = \frac{1}{2}(t - 1) - \frac{2}{3}t - 1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}t - 2 = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}t - 1\frac{1}{2}$

$6 \cdot \frac{1}{6}t - 6 \cdot 2 = 6 \cdot \frac{1}{2}t - 6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{2}{3}t - 6 \cdot 1\frac{1}{2}$

$t - 12 = 3t - 3 - 4t - 9$

$t - 12 = -t - 12$

$2t = 0$

$t = 0$

L2 **a** $\frac{1}{4}x - 3 = \frac{3}{8}x + 5$

$8 \cdot \frac{1}{4}x - 8 \cdot 3 = 8 \cdot \frac{3}{8}x + 8 \cdot 5$

$2x - 24 = 3x + 40$

$-x = 64$

$x = -64$

b $\frac{3}{4}x - 2 = \frac{2}{3}(x - 3)$

$\frac{3}{4}x - 2 = \frac{2}{3}x - 2$

$12 \cdot \frac{3}{4}x - 12 \cdot 2 = 12 \cdot \frac{2}{3}x - 12 \cdot 2$

$9x - 24 = 8x - 24$

$x = 0$

10 $\frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x + 10 = x$

$24 \cdot \frac{5}{6}x + 24 \cdot \frac{1}{8}x + 24 \cdot 10 = 24 \cdot x$

$20x + 3x + 240 = 24x$

$23x + 240 = 24x$

$-x = -240$

$x = 240$

Bladzijde 15

11 **a** $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 16$

$15 \cdot \frac{x}{3} + 15 \cdot \frac{x}{5} = 15 \cdot 16$

$5x + 3x = 240$

$8x = 240$

$x = 30$

b $\frac{x - 1}{2} + \frac{2x - 3}{3} = 9$

$6 \cdot \frac{x - 1}{2} + 6 \cdot \frac{2x - 3}{3} = 6 \cdot 9$

$3(x - 1) + 2(2x - 3) = 54$

$3x - 3 + 4x - 6 = 54$

$7x - 9 = 54$

$7x = 63$

$x = 9$

c $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 1}{5} = -6$

$15 \cdot \frac{2x + 1}{3} - 15 \cdot \frac{x - 1}{5} = 15 \cdot -6$

$5(2x + 1) - 3(x - 1) = -90$

$10x + 5 - 3x + 3 = -90$

$7x + 8 = -90$

$7x = -98$

$x = -14$

d $\frac{2x + 1}{3} - \frac{3x - 1}{4} = -\frac{x}{2}$

$12 \cdot \frac{2x + 1}{3} - 12 \cdot \frac{3x - 1}{4} = 12 \cdot -\frac{x}{2}$

$4(2x + 1) - 3(3x - 1) = -6x$

$8x + 4 - 9x + 3 = -6x$

$-x + 7 = -6x$

$5x = -7$

$x = -1\frac{2}{5}$

12 **a** $a \neq 0$ geeft $0x \neq 0$ en dat klopt niet.
$a = 0$ geeft $0x = 0$ en dat klopt voor elke x.
Dus $0x = a$ heeft
- geen oplossing voor $a \neq 0$
- elk getal x als oplossing voor $a = 0$.

b $2(3x + 5) - 6(x - 1) = 16$
$6x + 10 - 6x + 6 = 16$
$0x + 16 = 16$
$0x = 0$
elk getal x

$6(x + 1) = 3(x + 2)$
$6x + 6 = 3x + 6$
$3x = 0$
$x = 0$

$5x - 3(x + 2) = 2(x - 3)$
$5x - 3x - 6 = 2x - 6$
$2x - 6 = 2x - 6$
$0x = 0$
elk getal x

$3(x + 4) + 2(x - 1) = 5x + 8$
$3x + 12 + 2x - 2 = 5x + 8$
$5x + 10 = 5x + 8$
$0x = -2$
geen oplossing

c $3(x + 1) + 2x = 5x + p$
$3x + 3 + 2x = 5x + p$
$5x + 3 = 5x + p$
$0x = p - 3$
Voor $p = 3$ heeft de vergelijking elk getal x als oplossing.

d Voor $p \neq 3$ heeft de vergelijking geen oplossing.

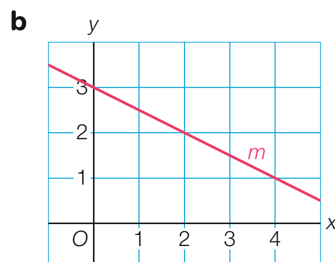
1.2 Lineaire formules

Bladzijde 16

13 **a**

x	0	4
y	3	1

b



c Het getal 3 is de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van m en de y-as.

d Voor de grafiek geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je $-\frac{1}{2}$ omhoog, dus $\frac{1}{2}$ omlaag.

Bladzijde 17

14 Door in de algemene vorm $y = ax + b$ zowel $a = 0$ als $b = 0$ te nemen, krijg je de formule $y = 0$.
Dus er is sprake van een constant verband en van een recht evenredig verband.

15 **a** $l: y = \frac{1}{2}x - 2$

x	0	4
y	-2	0

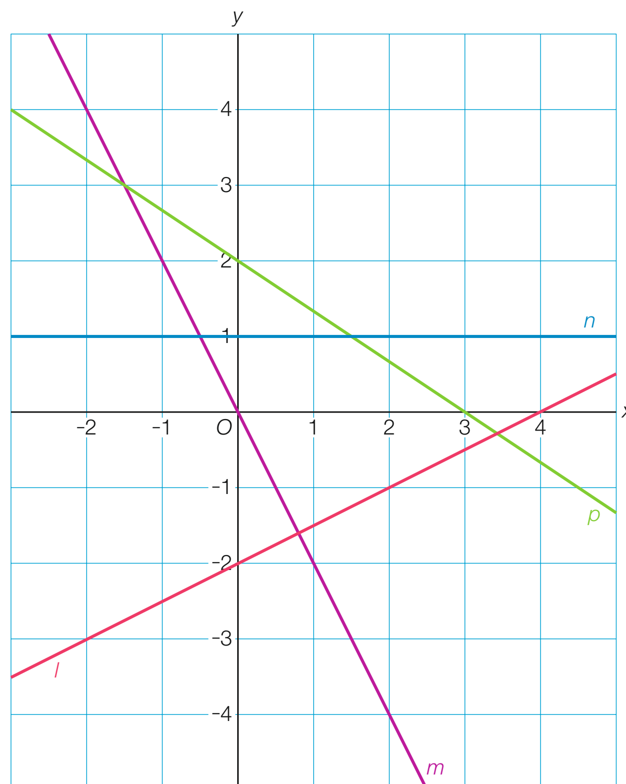
$m: y = -2x$

x	0	2
y	0	-4

$n: y = 1$
Dit is een horizontale lijn op hoogte 1.

$p: y = -\frac{2}{3}x + 2$

x	0	3
y	2	0



Zie de figuur hiernaast.

b Bij m is sprake van een recht evenredig verband.
Bij n is sprake van een constant verband.

16 **a** $x = 7$ geeft $y = 8 \cdot 7 - 13 = 56 - 13 = 43$, dus A ligt op l.
b $x = 10$ geeft $y = 8 \cdot 10 - 13 = 80 - 13 = 67 \neq 93$, dus B ligt niet op l.
c $x = -1$ geeft $y = 8 \cdot -1 - 13 = -8 - 13 = -21 \neq -5$, dus C ligt niet op l.
d $x = -5$ geeft $y = 8 \cdot -5 - 13 = -40 - 13 = -53$, dus de y-coördinaat van D is -53.

17 **a** $x = -8$ en $y = a$ geeft $a = -7 \cdot -8 + 8 = 56 + 8 = 64$
b $x = b$ en $y = 7$ geeft $-7b + 8 = 7$
$-7b = -1$
$b = \frac{1}{7}$
c $x = c$ en $y = c$ geeft $-7c + 8 = c$
$-8c = -8$
$c = 1$

18 **a** $x = p$ en $y = 13$ geeft $3p - 5 = 13$
$3p = 18$
$p = 6$
b $x = 5$ en $y = -2$ geeft $a \cdot 5 + 3 = -2$
$5a = -5$
$a = -1$
c $x = -3$ en $y = 11$ geeft $-2 \cdot -3 + b = 11$
$6 + b = 11$
$b = 5$

19 $m: y = ax + b$
Het snijpunt van m met de y-as is $(0, 8)$, dus $b = 8$ oftewel $m: y = ax + 8$.
$x = -1$ en $y = 5$ geeft $a \cdot -1 + 8 = 5$
$-a = -3$
$a = 3$

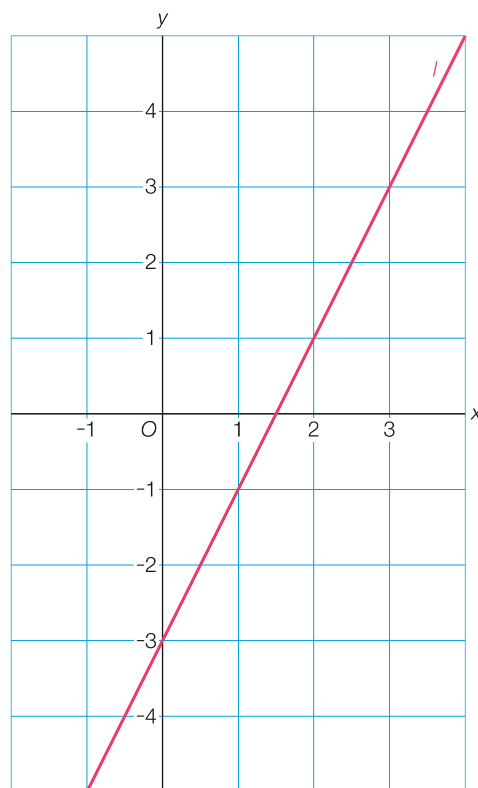
Bladzijde 18

20 $k: y = ax + b$
$k // l$, dus $a = rc_k = rc_l = -2$ oftewel $k: y = -2x + b$.
$x = -5$ en $y = -1$ geeft $-2 \cdot -5 + b = -1$
$10 + b = -1$
$b = -11$

L3 **a**

x	0	3
y	-3	3

Zie de figuur hiernaast.



b $x = 5$ geeft $y = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$, dus de y-coördinaat van A is 7.
c $x = -8$ geeft $y = 2 \cdot -8 - 3 = -16 - 3 = -19 \neq -18$, dus B ligt niet op l.
d $x = 10$ en $y = p$ geeft $p = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17$
e $x = q$ en $y = -25$ geeft $2 \cdot q - 3 = -25$
$2q = -22$
$q = -11$

21 **a** Het snijpunt met de y-as is (0, 4), dus $b = 4$.
b De grafiek gaat 5 naar rechts en 2 omlaag oftewel 1 naar rechts en $\frac{2}{5}$ omlaag, dus $a = -\frac{2}{5}$.
c De formule van k is $y = -\frac{2}{5}x + 4$.

Bladzijde 19

22 **a** $\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (4, 3) \end{array}\right\} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = 3$
$2\frac{2}{3} + b = 3$
$b = \frac{1}{3}$

b Het snijpunt met de y-as is $(0, \frac{1}{3})$.

23 $k: y = ax + b$
Door (−1, 1) en (1, 4), dus $a = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.
$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-1, 1) \end{array}\right\} 1\frac{1}{2} \cdot -1 + b = 1$
$-1\frac{1}{2} + b = 1$
$b = 2\frac{1}{2}$
Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

24 $l: y = ax + b$
Door (−1, 2) en (2, −2), dus $a = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } (-1, 2) \end{array}\right\} -1\frac{1}{3} \cdot -1 + b = 2$
$1\frac{1}{3} + b = 2$
$b = \frac{2}{3}$
Dus $l: y = -1\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Bladzijde 20

25 $k: y = ax + b$

Door (−3, −1) en (2, 2), dus $a = \frac{3}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{5}x + b \\ \text{door } (2, 2) \end{array}\right\} \frac{3}{5} \cdot 2 + b = 2$

$1\frac{1}{5} + b = 2$

$b = \frac{4}{5}$

Dus $k: y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$.

$l: y = ax + b$.

Door (−4, 5) en (−2, 0), dus $a = \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-2, 0) \end{array}\right\} -2\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 0$

$5 + b = 0$

$b = -5$

Dus $l: y = -2\frac{1}{2}x - 5$.

26 Lijn m gaat door (2, 0) en (3, 3), dus $\text{rc}_m = \frac{3}{1} = 3$.

$n: y = ax + b$

$n \,//\, m$, dus $a = \text{rc}_n = \text{rc}_m = 3$.

$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } (-10, 7) \end{array}\right\} 3 \cdot -10 + b = 7$

$-30 + b = 7$

$b = 37$

Dus $S(0, 37)$.

L4 $l: y = ax + b$

Door (1, −1) en (5, 2), dus $a = \frac{3}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (5, 2) \end{array}\right\} \frac{3}{4} \cdot 5 + b = 2$

$3\frac{3}{4} + b = 2$

$b = -1\frac{3}{4}$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

27 **a** Door (15, 75) en (45, 0), dus $a = \frac{-75}{30} = -2\frac{1}{2}$.

b $\left.\begin{array}{l} G = -2\frac{1}{2}n + b \\ \text{door } (45, 0) \end{array}\right\} -2\frac{1}{2} \cdot 45 + b = 0$

$-112\frac{1}{2} + b = 0$

$b = 112\frac{1}{2}$

Dus $G = -2\frac{1}{2}n + 112\frac{1}{2}$.

Bladzijde 21

28 **a** $V = as + b$

Door (25, 200) en (100, 300), dus $a = \frac{100}{75} = 1\frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} V = 1\frac{1}{3}s + b \\ \text{door } (25, 200) \end{array}\right\} 1\frac{1}{3} \cdot 25 + b = 200$

$33\frac{1}{3} + b = 200$

$b = 166\frac{2}{3}$

Dus $V = 1\frac{1}{3}s + 166\frac{2}{3}$.

b $W = aq + b$

Door (−500, 50) en (1000, 0), dus $a = \frac{-50}{1500} = -\frac{1}{30}$.

$\left.\begin{array}{l} W = -\frac{1}{30}q + b \\ \text{door } (1000, 0) \end{array}\right\} -\frac{1}{30} \cdot 1000 + b = 0$

$-33\frac{1}{3} + b = 0$

$b = 33\frac{1}{3}$

Dus $W = -\frac{1}{30}q + 33\frac{1}{3}$.

29 **a** $E_A = as + b$

Door (25, 60) en (100, 45), dus $a = \frac{-15}{75} = -0{,}2$.

$\left.\begin{array}{l} E_A = -0{,}2s + b \\ \text{door } (25, 60) \end{array}\right\}$ $-0{,}2 \cdot 25 + b = 60$

$-5 + b = 60$

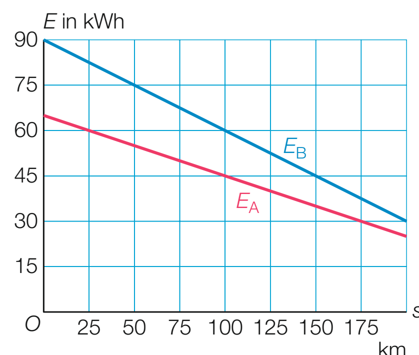
$b = 65$

Dus $E_A = -0{,}2s + 65$.

b

s	0	100
E_B	90	60

Zie de figuur hiernaast.



c $E_A = 0$ geeft $-0{,}2s + 65 = 0$

$-0{,}2s = -65$

$s = 325$

$E_B = 0$ geeft $90 - 0{,}3s = 0$

$-0{,}3s = -90$

$s = 300$

Dus auto A heeft het grootste bereik.

Het scheelt 325 − 300 = 25 kilometer.

d $E_A = E_B$ geeft $-0{,}2s + 65 = 90 - 0{,}3s$

$0{,}1s = 25$

$s = 250$

Dus na 250 kilometer kunnen beide auto's nog evenveel energie leveren.

30 $l_I = 420 + 24t$ met l in cm en $t = 0$ op 1 augustus.

Bij 19 augustus hoort $t = 18$ en dit geeft $l_I = 420 + 24 \cdot 18 = 852$ cm.

$l_{II} = 9t + b$ en voor $t = 18$ is $l_{II} = 852$. Dit geeft $9 \cdot 18 + b = 852$

$162 + b = 852$

$b = 690$

Dus $l_{II} = 9t + 690$.

$l_I = 2 \cdot l_{II}$ geeft $420 + 24t = 2(9t + 690)$

$420 + 24t = 18t + 1380$

$6t = 960$

$t = 160$

Dus 160 dagen na 1 augustus is stengel I twee keer zo lang als stengel II.

L5 $S = ar + b$

Door (10, 50) en (40, 150), dus $a = \frac{100}{30} = 3\frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} S = 3\frac{1}{3}r + b \\ \text{door } (10, 50) \end{array}\right\}$ $3\frac{1}{3} \cdot 10 + b = 50$

$33\frac{1}{3} + b = 50$

$b = 16\frac{2}{3}$

Dus $S = 3\frac{1}{3}r + 16\frac{2}{3}$.

1.3 Lineaire functies

Bladzijde 22

31 **a** $5 \cdot 2 + 3 = 10 + 3 = 13$, dus een rit van 5 km kost 13 euro.

b $12 \cdot 2 + 3 = 24 + 3 = 27$, dus een rit van 12 km kost 27 euro.

32 **a** $5 \cdot 7 - 4 = 35 - 4 = 31$

b $-4 \cdot 7 - 4 = -28 - 4 = -32$

33 **a** $18 \cdot \frac{1}{2} + 6 = 9 + 6 = 15$

b

invoer	-3	0	5	8
uitvoer	$4\frac{1}{2}$	6	$8\frac{1}{2}$	10

Bladzijde 23

34 A $10 + 2 = 12$
C $12 \cdot 3 = 36$
B $36 - 6 = 30$
Dus de juiste volgorde van de stappen is A-C-B.

Bladzijde 24

35 $f(4) + g(4) = -18 + -8 = -26$
$h(4) = -2 \cdot 4 - 18 = -26$
$h(4) = f(4) + g(4)$, want $h(x) = f(x) + g(x)$.

36 **a** $f(-5) = -4 \cdot -5 + 9 = 29$
$f(3) = -4 \cdot 3 + 9 = -3$
$f(8) = -4 \cdot 8 + 9 = -23$
b $g(-8) = --8 = 8$
$g(7) = -7$
$g(0) = -0 = 0$
c $f(5) + g(5) = -4 \cdot 5 + 9 + -5 = -16$
d $h(x) = f(x) + g(x) = -4x + 9 + -x = -5x + 9$

37 **a** $f(8) = 7 \cdot 8 - 8 = 48$
$g(8) = -3(8 - 7) = -3$
b $f(-2) = 7 \cdot -2 - 8 = -22$
$g(-2) = -3(-2 - 7) = 27$
c $f(0) = 7 \cdot 0 - 8 = -8$
d $f(7) + g(7) = 7 \cdot 7 - 8 + -3(7 - 7) = 41$
e $h(x) = f(x) + g(x) = 7x - 8 + -3(x - 7) = 7x - 8 - 3x + 21 = 4x + 13$

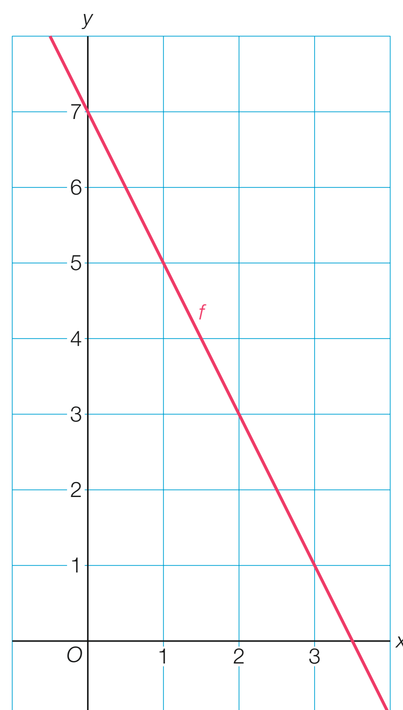
L6 $f(4) = -2 \cdot 4 - 5 = -13$
$f(-3) = -2 \cdot -3 - 5 = 1$

Bladzijde 25

38 **a**

x	0	3
$f(x)$	7	1

Zie de figuur hiernaast.
b $f(-3) = -2 \cdot -3 + 7 = 13$
Dus A ligt op de grafiek.
c $f(80) = -2 \cdot 80 + 7 = -153 \neq -167$
Dus B ligt niet op de grafiek.
d $y_C = f(-10) = -2 \cdot -10 + 7 = 27$
e $y_D = 21$, dus $f(x) = 21$
$-2x + 7 = 21$
$-2x = 14$
$x = -7$
Dus $x_D = -7$.



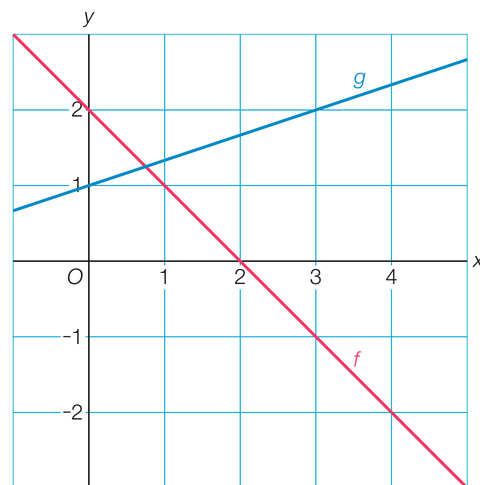
39 $f(x) = -x + 2$

x	0	4
$f(x)$	2	-2

$g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

x	0	3
$g(x)$	1	2

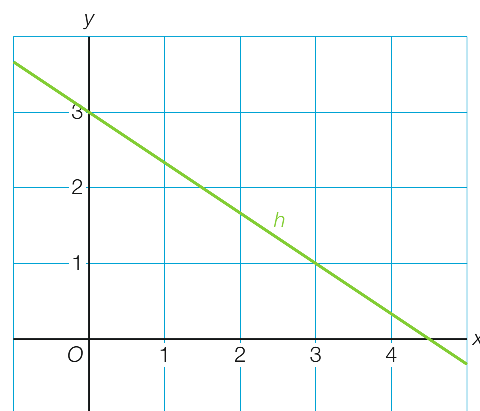
Zie de figuur hiernaast.



40 $h(x) = f(x) + g(x) = -x + 2 + \frac{1}{3}x + 1 = -\frac{2}{3}x + 3$

x	0	3
$h(x)$	3	1

Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 26

41
a $f(x) = 2x - 3$

x	0	3
$f(x)$	-3	3

$g(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$

x	0	2
$g(x)$	1	4

Zie de figuur hiernaast.

b $g(-18) = 1\frac{1}{2} \cdot -18 + 1 = -26 \neq -28$
Dus R ligt niet op de grafiek van g.

c $y_P = -8$, dus $g(x) = -8$

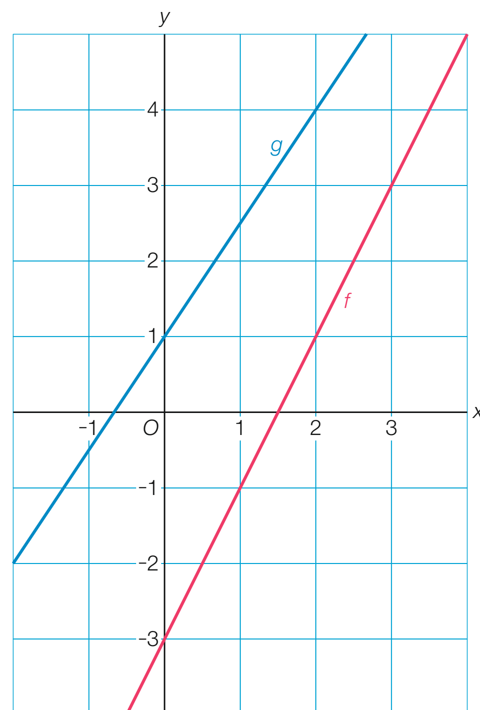
$$1\frac{1}{2}x + 1 = -8$$
$$1\frac{1}{2}x = -9$$
$$x = -6$$

Dus $x_P = -6$.

d $y_Q = 0$, dus $f(x) = 0$

$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = 1\frac{1}{2}$$

Dus $x_Q = 1\frac{1}{2}$.



L7 **a**

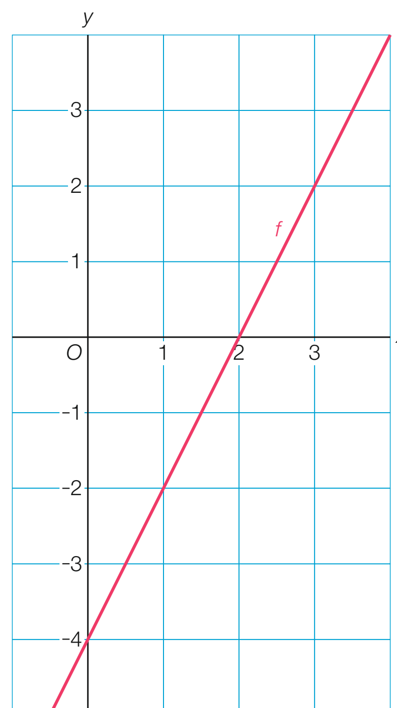
x	0	3
$f(x)$	-4	2

Zie de figuur hiernaast.

b $y_A = f(9) = 2 \cdot 9 - 4 = 14$

c $f(-11) = 2 \cdot -11 - 4 = -26 \neq -18$

Dus B ligt niet op de grafiek.



42 **a** $f(-8) = 80$, dus $-8a + 8 = 80$

$-8a = 72$

$a = -9$

b $f(5) = -12$, dus $5a + 8 = -12$

$5a = -20$

$a = -4$

c $f(-1) = 8$, dus $-a + 8 = 8$

$-a = 0$

$a = 0$

43 **a** $g(-5) = 57$, dus $-5a - 3 = 57$

$-5a = 60$

$a = -12$

b $g(-5) = a$, dus $-5a - 3 = a$

$-6a = 3$

$a = -\frac{1}{2}$

c Evenwijdig met $y = -5x + 6$, dus $a = -5$.

d $g(a) = 22$, dus $a \cdot a - 3 = 22$

$a^2 - 3 = 22$

$a^2 = 25$

$a = 5 \vee a = -5$

44 **a** $h(-5) = 20$, dus $3 \cdot -5 + b = 20$

$-15 + b = 20$

$b = 35$

b $h(b) = 12$, dus $3b + b = 12$

$4b = 12$

$b = 3$

45 **a** Evenwijdig met $y = 9x + 8$, dus $\frac{1}{3}a = 9$ en dit geeft $a = 27$.

b $k(15) = a$, dus $\frac{1}{3}a \cdot 15 + 12 = a$

$5a + 12 = a$

$4a = -12$

$a = -3$

46 $f(2) = a$, dus $2a + b = a$

$b = -a$

Dus $f(x) = ax - a$.

$f(-4) = 15$, dus $-4a - a = 15$

$-5a = 15$

$a = -3$

Dus $f(x) = -3x + 3$.

$f(-1) = -3 \cdot -1 + 3 = 6$, dus C ligt op de grafiek.

1.4 Snijpunten van grafieken

Bladzijde 27

47 **a** Van een punt op de x-as is de y-coördinaat gelijk aan 0.

Van een punt op de y-as is de x-coördinaat gelijk aan 0.

b $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$, dus het snijpunt van de grafiek van f met de y-as is $A(0, 2)$.

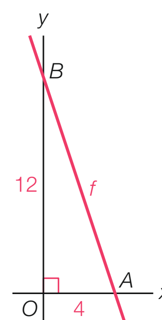
c $f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 0$, dus het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is $B(4, 0)$.

Bladzijde 28

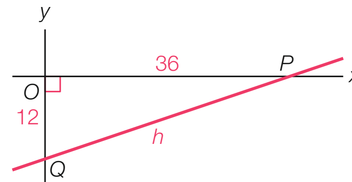
48 **a** $f(x) = 0$ geeft $5x - 20 = 0$
$5x = 20$
$x = 4$
Dus $A(4, 0)$.
$f(0) = -20$, dus $B(0, -20)$.

b $g(x) = 0$ geeft $-1\frac{2}{3}x + 7 = 0$
$-1\frac{2}{3}x = -7$
$3 \cdot -\frac{5}{3}x = 3 \cdot -7$
$-5x = -21$
$x = 4\frac{1}{5}$
Dus $P(4\frac{1}{5}, 0)$.
$g(0) = 7$, dus $Q(0, 7)$.

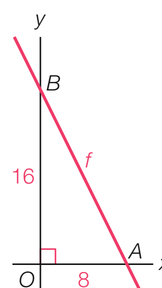
49 $f(x) = 0$ geeft $-3x + 12 = 0$
$-3x = -12$
$x = 4$
Dus $A(4, 0)$.
$f(0) = 12$, dus $B(0, 12)$.
Zie de schets hiernaast.
opp. $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24$



50 $h(x) = 0$ geeft $\frac{1}{3}x - 12 = 0$
$\frac{1}{3}x = 12$
$x = 36$
Dus $P(36, 0)$.
$h(0) = -12$, dus $Q(0, -12)$.
Zie de schets hiernaast.
opp. $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 12 = 216$



51 $f(8) = 0$ geeft $-2 \cdot 8 + b = 0$
$-16 + b = 0$
$b = 16$
Dus $f(x) = -2x + 16$.
$f(0) = 16$, dus $B(0, 16)$.
Zie de schets hiernaast.
opp. $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$



52 $f(0) = 8$, dus $B(0, 8)$ en $OB = 8$.
opp. $\triangle OAB = 24$ geeft $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot 8 = 24$
$4 \cdot OA = 24$
$OA = 6$
Dus $A(6, 0)$ of $A(-6, 0)$.
$f(6) = 0$, dus $6a + 8 = 0$
$6a = -8$
$a = -1\frac{1}{3}$
$f(-6) = 0$, dus $-6a + 8 = 0$
$-6a = -8$
$a = 1\frac{1}{3}$
Dus $a = -1\frac{1}{3} \vee a = 1\frac{1}{3}$.

Bladzijde 29

L8 $f(x) = 0$ geeft $-2x + 6 = 0$
$-2x = -6$
$x = 3$
Dus $A(3, 0)$.
$f(0) = 6$, dus $B(0, 6)$.

53 **a** $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
$g(1) = -1 + 6 = 5$
b Je weet nu $B(1, 5)$.

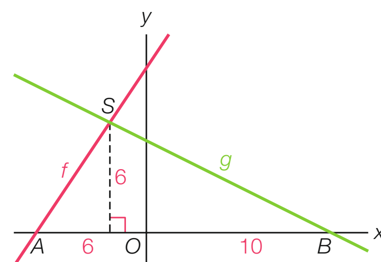
54 $f(x) = g(x)$ geeft $8x - 20 = -2x$
$10x = 20$
$x = 2$
$g(2) = -2 \cdot 2 = -4$
Dus $S(2, -4)$.

Bladzijde 30

55 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = -1\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{10}$
$10 \cdot \frac{3}{5}x - 10 \cdot \frac{2}{5} = 10 \cdot -1\frac{1}{5}x + 10 \cdot 4\frac{1}{10}$
$6x - 4 = -12x + 41$
$18x = 45$
$x = 2\frac{1}{2}$
$f(2\frac{1}{2}) = \frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = 1\frac{1}{10}$
Dus $S(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{10})$.

56 $f(x) = 0$ geeft $3x - 1 = 0$
$3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$
Dus $A(\frac{1}{3}, 0)$.
$g(0) = 2$, dus $B(0, 2)$.
$f(x) = g(x)$ geeft $3x - 1 = x + 2$
$2x = 3$
$x = 1\frac{1}{2}$
$g(1\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$
Dus $C(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

57 $f(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 9 = 0$
$\frac{3}{2}x = -9$
$3x = -18$
$x = -6$
Dus $A(-6, 0)$.
$g(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + 5 = 0$
$-\frac{1}{2}x = -5$
$x = 10$
Dus $B(10, 0)$.
$f(x) = g(x)$ geeft $1\frac{1}{2}x + 9 = -\frac{1}{2}x + 5$
$2x = -4$
$x = -2$
$f(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot -2 + 9 = 6$
Dus $S(-2, 6)$.
Zie de schets hiernaast.
opp. $\triangle ABS = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48$



58 **a** $g(-1) = 8$, dus $-q + 4 = 8$
$-q = 4$
$q = -4$
$q = -4$ geeft $f(x) = px - 4$
$f(-1) = 8$, dus $-p - 4 = 8$
$-p = 12$
$p = -12$
b $h(5) = k(5)$ geeft $5a + 7 = -2 \cdot 5 + 3a$
$5a + 7 = -10 + 3a$
$2a = -17$
$a = -8\frac{1}{2}$

L9 $f(x) = g(x)$ geeft $-5x + 9 = 3x - 15$
$-8x = -24$
$x = 3$
$g(3) = 3 \cdot 3 - 15 = -6$
Dus $S(3, -6)$.

1.5 Vergelijkingen met twee variabelen

Bladzijde 31

59 **a** 6 zakken bruine bollen kosten dan $6 \cdot 3 = 18$ euro.
5 zakken krentenbollen kosten dan $28 - 18 = 10$ euro.
Een zak krentenbollen kost dan $10 : 5 = 2$ euro.
b 6 zakken bruine bollen kosten dan $6 \cdot 1{,}50 = 9$ euro.
5 zakken krentenbollen kosten dan $28 - 9 = 19$ euro.
Een zak krentenbollen kost dan $19 : 5 = 3{,}80$ euro.
c Zes zakken bruine bollen kosten dan $6y$ euro.
Samen kosten ze 28 euro, dus $5x + 6y = 28$.

Bladzijde 32

60 **a** $x = 6$ en $y = -5$ geeft $5 \cdot 6 + 2 \cdot -5 = 20$
Dus $(6, -5)$ is een oplossing.
b $y = 0$ geeft $5x + 2 \cdot 0 = 20$
$5x = 20$
$x = 4$
Dus $(4, 0)$.
c $x = -2$ geeft $5 \cdot -2 + 2y = 20$
$-10 + 2y = 20$
$2y = 30$
$y = 15$
Dus $(-2, 15)$.

61 **a** $x = 3$ en $y = -4$ geeft $2 \cdot 3 - -4 = 10$, dus $(3, -4)$ is een oplossing.
$x = -3$ en $y = 4$ geeft $2 \cdot -3 - 4 = -10 \neq 10$, dus $(-3, 4)$ is geen oplossing.
$x = 5$ en $y = 0$ geeft $2 \cdot 5 - 0 = 10$, dus $(5, 0)$ is een oplossing.
$x = 0$ en $y = -10$ geeft $2 \cdot 0 - -10 = 10$, dus $(0, -10)$ is een oplossing.
b $x = 7$ geeft $2 \cdot 7 - y = 10$
$14 - y = 10$
$-y = -4$
$y = 4$
Dus $(7, 4)$.
c $y = -1$ geeft $2x - -1 = 10$
$2x + 1 = 10$
$2x = 9$
$x = 4\frac{1}{2}$
Dus $(4\frac{1}{2}, -1)$.

62 **a** y flessen cola kosten $1{,}75y$ euro.
b $1{,}5x + 1{,}75y = 14$

63 **a** $6x + 4y = 10{,}4$
b $y = 1{,}1$ geeft $6x + 4 \cdot 1{,}1 = 10{,}4$
$6x + 4{,}4 = 10{,}4$
$6x = 6$
$x = 1$
Dus een croissant kost dan 1 euro.
c $x = 0{,}9$ geeft $6 \cdot 0{,}9 + 4y = 10{,}4$
$5{,}4 + 4y = 10{,}4$
$4y = 5$
$y = 1{,}25$
Dus een stokbrood kost dan 1,25 euro.

Bladzijde 33

64 **a** $12x + 16y = 5740$
b $x = 225$ geeft $12 \cdot 225 + 16y = 5740$
$2700 + 16y = 5740$
$16y = 3040$
$y = 190$
Dus er zijn dan 190 kaarten van 16 euro verkocht.
c Evenveel kaarten van 12 en 16 euro verkocht, dus $x = y$ en dit geeft $12x + 16x = 5740$
$28x = 5740$
$x = 205$
Dus in totaal zijn er dan $2 \cdot 205 = 410$ kaarten verkocht.

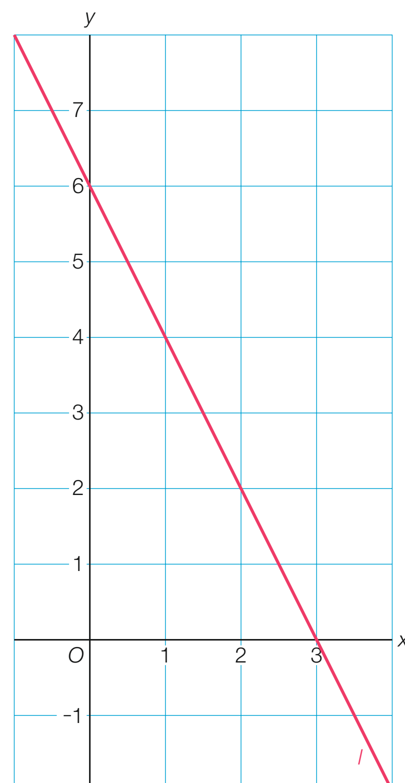
L10 **a** $x = 2$ en $y = 4$ geeft $2 + 2 \cdot 4 = 10$
Dus (2, 4) is inderdaad een oplossing.
b $x = 6$ en $y = -2$ geeft $6 + 2 \cdot -2 = 2 \neq 10$
Dus (6, −2) is geen oplossing.
c $y = 7$ geeft $x + 2 \cdot 7 = 10$
$x + 14 = 10$
$x = -4$
Dus (−4, 7).

65 **a** $x = -1$ geeft $2 \cdot -1 + y = 6$
$-2 + y = 6$
$y = 8$

b

x	−1	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0	−2

c, d Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 34

66 l: $x + 2y = 4$

x	0	4
y	2	0

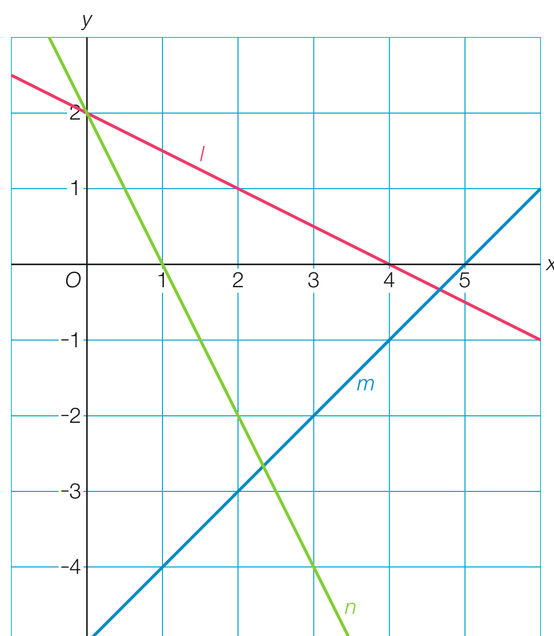
m: $x - y = 5$

x	0	5
y	-5	0

n: $2x + y = 2$

x	0	1
y	2	0

Zie de figuur hiernaast.



67 **a**

x	0	0
y	0	0

Uit de tabel volgt twee keer het punt (0, 0).
Je weet nu dus alleen het punt (0, 0).

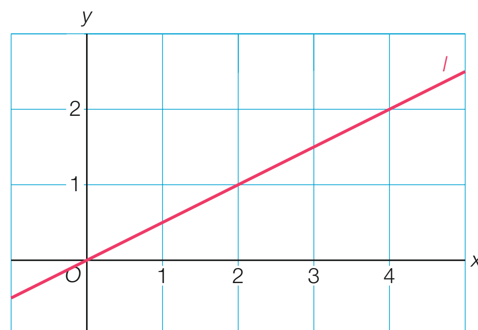
b $y = 1$ geeft $x - 2 \cdot 1 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Dus (2, 1) is een punt van l.

c Zie de figuur hiernaast.



68 l: $3x - y = 0$

x	0	1
y	0	3

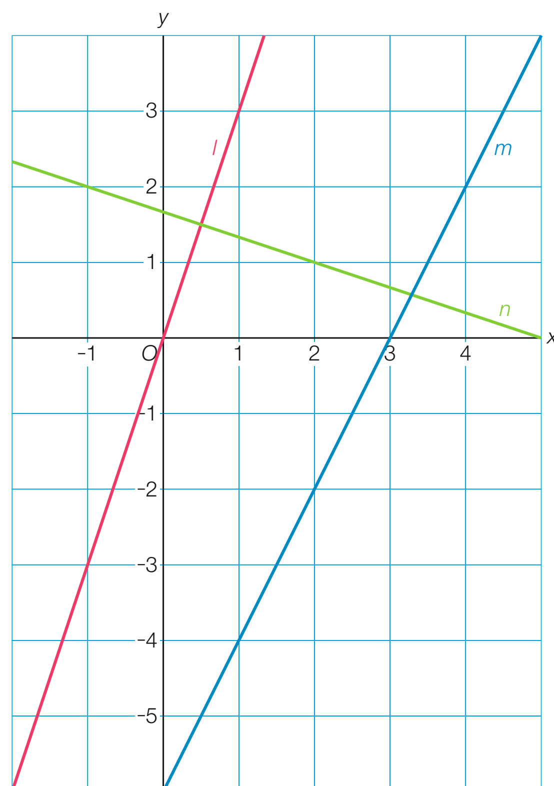
m: $2x - y = 6$

x	0	3
y	-6	0

n: $x + 3y = 5$

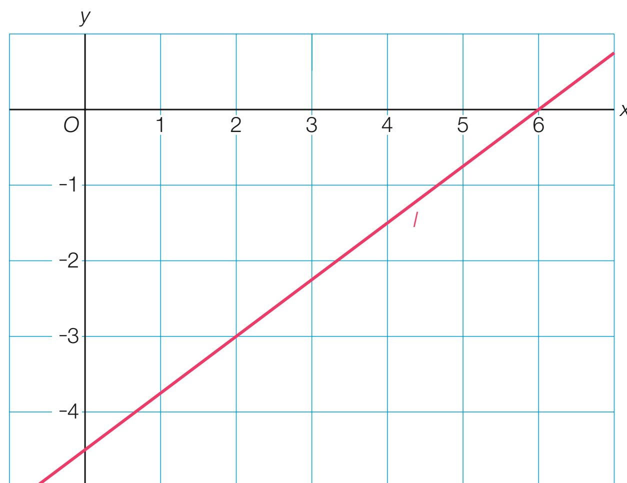
x	-1	5
y	2	0

Zie de figuur hiernaast.



69 **a** $y = 0$ geeft $5x = 20$, dus $x = 4$.
Dus $x_A = 4$.
b $x = 0$ geeft $-2y = 20$, dus $y = -10$.
Dus $B(0, -10)$.

70 **a** $x = -10$ en $y = 12$ geeft
$3 \cdot -10 - 4 \cdot 12 = -78 \neq 18$
Dus A ligt niet op l.
b $y = 0$ geeft $3x = 18$, dus $x = 6$.
Dus $B(6, 0)$.
$x = 0$ geeft $-4y = 18$, dus $y = -4\frac{1}{2}$.
Dus $C(0, -4\frac{1}{2})$.
c Zie de figuur hiernaast.
d $x = 8$ en $y = a$ geeft $3 \cdot 8 - 4a = 18$
$24 - 4a = 18$
$-4a = -6$
$a = 1\frac{1}{2}$
e $x = p$ en $y = p$ geeft $3p - 4p = 18$
$-p = 18$
$p = -18$



Bladzijde 35

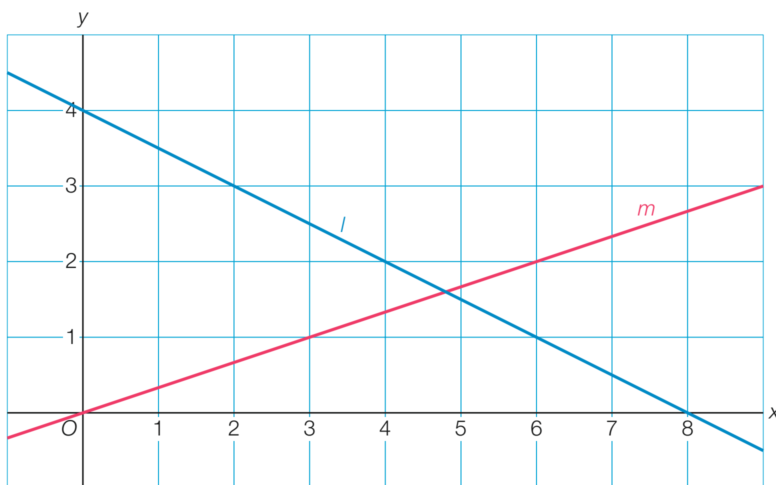
L11 l: $x + 2y = 8$

x	0	8
y	4	0

m: $x - 3y = 0$

x	0	3
y	0	1

Zie de figuur hiernaast.



71 $y = -3x + 9$

Bladzijde 36

72 **a** $3x - y = 8$
$3x = y + 8$
$x = \frac{1}{3}y + 2\frac{2}{3}$
b $2x - 3y = 12$ is de lijn $y = \frac{2}{3}x - 4$.
Dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{2}{3}$.

73 **a** $x - y = 10$
$x = y + 10$
b $2x + y = 7$
$y = -2x + 7$
c $3x + 6y = 10$
$3x = -6y + 10$
$x = -2y + 3\frac{1}{3}$
d $2x - y = -7$
$-y = -2x - 7$
$y = 2x + 7$

74 **a** $y = 2x + 9$
$-2x + y = 9$
$2x - y = -9$
b $y = \frac{1}{2}x$
$\frac{1}{2}x - y = 0$
$x - 2y = 0$
c $y = -\frac{3}{4}x + 2$
$\frac{3}{4}x + y = 2$
$3x + 4y = 8$

75 **a** $x + 3y = 30$
$3y = -x + 30$
$y = -\frac{1}{3}x + 10$
b $5x + 2y = 0$
$2y = -5x$
$y = -2\frac{1}{2}x$
c $2x - 3y = 6$
$-3y = -2x + 6$
$y = \frac{2}{3}x - 2$

76 **a** $3x + 2y = 15$
$3x = -2y + 15$
$x = -\frac{2}{3}y + 5$
b $4x - y = 5$
$-y = -4x + 5$
$y = 4x - 5$
c $y = 1\frac{1}{4}x - 3$
$-1\frac{1}{4}x + y = -3$
$5x - 4y = 12$
d $5x - 2y = 10$
$-2y = -5x + 10$
$y = 2\frac{1}{2}x - 5$
e $y = 4x - 10$
$-4x = -y - 10$
$x = \frac{1}{4}y + 2\frac{1}{2}$

77 **a** k: $y = ax + b$
Door (0, 1), dus $b = 1$.
Door (0, 1) en (3, 3), dus $a = \frac{2}{3}$.
Dus k: $y = \frac{2}{3}x + 1$.
b $y = \frac{2}{3}x + 1$
$-\frac{2}{3}x + y = 1$
$2x - 3y = -3$
Dus k: $2x - 3y = -3$.
c l: $y = ax + b$
Door (0, 3), dus $b = 3$.
Door (0, 3) en (2, 0), dus $a = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$.
$y = -1\frac{1}{2}x + 3$
$1\frac{1}{2}x + y = 3$
$3x + 2y = 6$
Dus l: $3x + 2y = 6$.

Bladzijde 37

78 m: $y = ax + b$

Door (−1, 4) en (1, 3), dus $a = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (1, 3) \end{array}\right\} -\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3$$

$-\frac{1}{2} + b = 3$

$b = 3\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$

$x + 2y = 7$

Dus m: $x + 2y = 7$.

n: $y = ax + b$

Door (−2, −1) en (2, 0), dus $a = \frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } (2, 0) \end{array}\right\} \frac{1}{4} \cdot 2 + b = 0$$

$\frac{1}{2} + b = 0$

$b = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4}x + y = -\frac{1}{2}$

$x - 4y = 2$

Dus n: $x - 4y = 2$.

79 k: $y = ax + b$

Van $A(-1, -2)$ naar $B(5, 2)$ ga je 6 naar rechts en 4 omhoog, dus $a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (5, 2) \end{array}\right\} \frac{2}{3} \cdot 5 + b = 2$$

$3\frac{1}{3} + b = 2$

$b = -1\frac{1}{3}$

$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3}x + y = -1\frac{1}{3}$

$2x - 3y = 4$

Dus k: $2x - 3y = 4$.

80

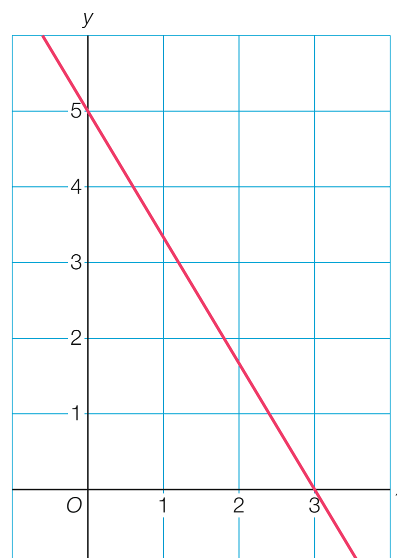
a $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$

$15 \cdot \frac{x}{3} + 15 \cdot \frac{y}{5} = 15 \cdot 1$

$5x + 3y = 15$

b

x	0	3
y	5	0



Zie de figuur hiernaast.
De noemer van de breuk met teller x is de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de x-as. En de noemer van de breuk met teller y is de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y-as.

c $2x + 7y = 14$

$\frac{2x}{14} + \frac{7y}{14} = \frac{14}{14}$

$\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$

Dus de lijn $2x + 7y = 14$ snijdt de x-as in (7, 0) en de y-as in (0, 2).

d $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ is $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, dus de lijn snijdt de x-as in (2, 0) en de y-as in (0, −3).

e Door $A(0, 7)$ en $B(13, 0)$, dus m: $\frac{x}{13} + \frac{y}{7} = 1$.

De vorm $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ heeft de voorkeur, want de vergelijking kun je direct in deze vorm noteren als je de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de assen weet.

L12

a $x + 3y = 11$

$x = -3y + 11$

b $2x + y = 5$

$y = -2x + 5$

c $y = 2x - 7$

$-2x + y = -7$

$2x - y = 7$

d $2x - 3y = 6$

$-3y = -2x + 6$

$y = \frac{2}{3}x - 2$

1.6 Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 38

81 **a** $x = 2$ en $y = -1$ invullen in $x + y = 1$ geeft $2 - 1 = 1$.
Dus $(2, -1)$ is een oplossing van $x + y = 1$.
$x = 2$ en $y = -1$ invullen in $x - 2y = 4$ geeft $2 - 2 \cdot -1 = 4$.
Dus $(2, -1)$ is een oplossing van $x - 2y = 4$.

b $S(2, -1)$
De coördinaten van het snijpunt S van l en m zijn zowel een oplossing van l: $x + y = 1$ als van m: $x - 2y = 4$.

82 **a** $x = 1$ en $y = -3$ invullen in $x - y = 4$ geeft $1 - -3 = 4$.
$x = 1$ en $y = -3$ invullen in $3x + 2y = -3$ geeft $3 \cdot 1 + 2 \cdot -3 = -3$.
Dus $(1, -3)$ is inderdaad de oplossing.

b $x = -2$ en $y = 5$ invullen in $x + 2y = 8$ geeft $-2 + 2 \cdot 5 = 8$.
$x = -2$ en $y = 5$ invullen in $2x + y = 1$ geeft $2 \cdot -2 + 5 = 1$.
Dus ja, $(-2, 5)$ is de oplossing.

c $x = 3$ en $y = -1$ invullen in $x + y = 2$ geeft $3 - 1 = 2$.
$x = 3$ en $y = -1$ invullen in $3x - 2y = 7$ geeft $3 \cdot 3 - 2 \cdot -1 = 11 \neq 7$.
Dus nee, $(3, -1)$ is geen oplossing.

Bladzijde 39

83 $6x - 5y = 6$
$6x = 5y + 6$
$x = \frac{5}{6}y + 1$
Je krijgt dan een vergelijking met een breuk en dat is niet handig om mee verder te werken.

Bladzijde 40

84 **a** $x + 3y = 5$
$x = -3y + 5$
Uit $x = -3y + 5$ en $3x + 5y = 11$ volgt $3(-3y + 5) + 5y = 11$
$-9y + 15 + 5y = 11$
$-4y + 15 = 11$
$-4y = -4$
$y = 1$
$y = 1$ invullen in $x = -3y + 5$ geeft $x = -3 \cdot 1 + 5 = 2$
Dus de oplossing is $(2, 1)$.

b $2x + y = 5$
$y = -2x + 5$
Uit $y = -2x + 5$ en $5x + 2y = 14$ volgt $5x + 2(-2x + 5) = 14$
$5x - 4x + 10 = 14$
$x + 10 = 14$
$x = 4$
$x = 4$ invullen in $y = -2x + 5$ geeft $y = -2 \cdot 4 + 5 = -3$.
Dus de oplossing is $(4, -3)$.

c $x + 5y = 10$
$x = -5y + 10$
Uit $x = -5y + 10$ en $3x + 2y = 4$ volgt $3(-5y + 10) + 2y = 4$
$-15y + 30 + 2y = 4$
$-13y + 30 = 4$
$-13y = -26$
$y = 2$
$y = 2$ invullen in $x = -5y + 10$ geeft $x = -5 \cdot 2 + 10 = 0$.
Dus de oplossing is $(0, 2)$.

85 **a** $2x - y = 4$
$-y = -2x + 4$
$y = 2x - 4$
Uit $y = 2x - 4$ en $3x - 2y = 2$ volgt $3x - 2(2x - 4) = 2$
$3x - 4x + 8 = 2$
$-x + 8 = 2$
$-x = -6$
$x = 6$
$x = 6$ invullen in $y = 2x - 4$ geeft $y = 2 \cdot 6 - 4 = 8$.
Dus de oplossing is (6, 8).

b $x + y = 0$
$x = -y$
Uit $x = -y$ en $x - 2y = 6$ volgt $-y - 2y = 6$
$-3y = 6$
$y = -2$
$y = -2$ invullen in $x = -y$ geeft $x = 2$.
Dus de oplossing is (2, −2).

c $2x + 3y = 13$
$2x = -3y + 13$
$x = -1\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{2}$
Uit $x = -1\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{2}$ en $3x - 7y = 8$ volgt $3(-1\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{2}) - 7y = 8$
$-4\frac{1}{2}y + 19\frac{1}{2} - 7y = 8$
$-11\frac{1}{2}y = -11\frac{1}{2}$
$y = 1$
$y = 1$ invullen in $x = -1\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{2}$ geeft $x = -1\frac{1}{2} \cdot 1 + 6\frac{1}{2} = 5$.
Dus de oplossing is (5, 1).

86 $4x - y = 3$
$-y = -4x + 3$
$y = 4x - 3$
Uit $y = 4x - 3$ en $2x + 3y = 12$ volgt $2x + 3(4x - 3) = 12$
$2x + 12x - 9 = 12$
$14x - 9 = 12$
$14x = 21$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$ invullen in $y = 4x - 3$ geeft $y = 4 \cdot 1\frac{1}{2} - 3 = 6 - 3 = 3$.
Dus $S(1\frac{1}{2}, 3)$.

87 **a** Het totale aantal munten is 155, dus $x + y = 155$.
b De totale waarde is 235 euro, dus $x + 2y = 235$.
c $x + y = 155$
$x = -y + 155$
Uit $x = -y + 155$ en $x + 2y = 235$ volgt $-y + 155 + 2y = 235$
$y + 155 = 235$
$y = 80$
$y = 80$ invullen in $x = -y + 155$ geeft $x = -80 + 155 = 75$.
Dus de oplossing is (75, 80).
d Er zitten 75 munten van 1 euro in de parkeermeter.

88 **a** $\begin{cases} x + y = 280 \\ 8x + 12y = 2660 \end{cases}$

b $x + y = 280$
$y = -x + 280$
Uit $y = -x + 280$ en $8x + 12y = 2660$ volgt $8x + 12(-x + 280) = 2660$
$8x - 12x + 3360 = 2660$
$-4x + 3360 = 2260$
$-4x = -700$
$x = 175$
$x = 175$ invullen in $y = -x + 280$ geeft $y = -175 + 280 = 105$.
Dus de oplossing is (175, 105).

c De bioscoop telt 105 plaatsen van 12 euro.

Bladzijde 41

89 **a** $\begin{cases} x + y = 380 \\ 11{,}5x + 17{,}25y = 5865 \end{cases}$
$x + y = 380$
$y = -x + 380$
Uit $y = -x + 380$ en $11{,}5x + 17{,}25y = 5865$ volgt $11{,}5x + 17{,}25(-x + 380) = 5865$
$11{,}5x - 17{,}25x + 6555 = 5865$
$-5{,}75x + 6555 = 5865$
$-5{,}75x = -690$
$x = 120$
$x = 120$ invullen in $y = -x + 380$ geeft $y = -120 + 380 = 260$.
Dus de oplossing is (120, 260).

c Er hebben zich 120 personen voor de 5 kilometer ingeschreven.

90 $\begin{cases} 18x + 18y + 2{,}5 = 25 \\ 9x + 26y + 6 = 30 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 18x + 18y = 22{,}5 \\ 9x + 26y = 24 \end{cases}$
$18x + 18y = 22{,}5$
$x + y = 1{,}25$
$x = -y + 1{,}25$
Uit $x = -y + 1{,}25$ en $9x + 26y = 24$ volgt $9(-y + 1{,}25) + 26y = 24$
$-9y + 11{,}25 + 26y = 24$
$17y + 11{,}25 = 24$
$17y = 12{,}75$
$y = 0{,}75$
$y = 0{,}75$ invullen in $x = -y + 1{,}25$ geeft $x = -0{,}75 + 1{,}25 = 0{,}5$
De vader van Gijs heeft zegels ter waarde van $40 \cdot 0{,}5 + 22 \cdot 0{,}75 = 36{,}50$ euro.
Hij moet dus nog $50 - 36{,}5 = 13{,}50$ euro bijbetalen.

91 $(-2, 3)$ geeft de vergelijking $-2a + 3b = 1$.
$(1, -1)$ geeft de vergelijking $a - b = 1$.
Hieruit volgt het stelsel $\begin{cases} -2a + 3b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases}$
$a - b = 1$
$a = b + 1$
Uit $a = b + 1$ en $-2a + 3b = 1$ volgt $-2(b + 1) + 3b = 1$
$-2b - 2 + 3b = 1$
$b - 2 = 1$
$b = 3$
$b = 3$ geeft $a = 3 + 1 = 4$
Dus de vergelijking is $4x + 3y = 1$.
$x = 22$ en $y = -29$ geeft $4 \cdot 22 + 3 \cdot -29 = 1$
Dus $(22, -29)$ is ook een oplossing.

92 $x + y - z = 4$ geeft $x = -y + z + 4$
$x = -y + z + 4$ invullen in $x - 2y + z = 1$ geeft $-y + z + 4 - 2y + z = 1$
$-3y + 2z = -3$
$x = -y + z + 4$ invullen in $2x + y - 3z = 12$ geeft $2(-y + z + 4) + y - 3z = 12$
$-2y + 2z + 8 + y - 3z = 12$
$-y - z = 4$
$-y - z = 4$ geeft $-y = z + 4$
$y = -z - 4$
$y = -z - 4$ invullen in $-3y + 2z = -3$ geeft $-3(-z - 4) + 2z = -3$
$3z + 12 + 2z = -3$
$5z = -15$
$z = -3$
$z = -3$ invullen in $y = -z - 4$ geeft $y = 3 - 4 = -1$.
$y = -1$ en $z = -3$ invullen in $x = -y + z + 4$ geeft $x = 1 - 3 + 4 = 2$.
Dus de oplossing is $(2, -1, -3)$.

L13 **a** $2x + y = 5$
$y = -2x + 5$
Uit $y = -2x + 5$ en $4x + 3y = 11$ volgt $4x + 3(-2x + 5) = 11$
$4x - 6x + 15 = 11$
$-2x + 15 = 11$
$-2x = -4$
$x = 2$
$x = 2$ invullen in $y = -2x + 5$ geeft $y = -2 \cdot 2 + 5 = 1$.
Dus de oplossing is $(2, 1)$.

b $x - 4y = 11$
$x = 4y + 11$
Uit $x = 4y + 11$ en $3x + 2y = 5$ volgt $3(4y + 11) + 2y = 5$
$12y + 33 + 2y = 5$
$14y + 33 = 5$
$14y = -28$
$y = -2$
$y = -2$ invullen in $x = 4y + 11$ geeft $x = 4 \cdot -2 + 11 = 3$.
Dus de oplossing is $(3, -2)$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 42

1 **a** $3(2x - 10) = 3x - (5 - 4x)$
$6x - 30 = 3x - 5 + 4x$
$6x - 30 = 7x - 5$
$-x = 25$
$x = -25$

b $5 - 2x = -3(2 + x)$
$5 - 2x = -6 - 3x$
$x = -11$

c $1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}x + 8$
$6 \cdot 1\frac{1}{3}x - 6 \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot 1\frac{1}{2}x + 6 \cdot 8$
$8x - 1 = 9x + 48$
$-x = 49$
$x = -49$

d $2x + 6x + 1 = -4(2 - 2x) - x$
$2x + 6x + 1 = -8 + 8x - x$
$8x + 1 = -8 + 7x$
$x = -9$

e $8 - 2(7 - 5x) = \frac{1}{2}(8x - 10)$
$8 - 14 + 10x = 4x - 5$
$-6 + 10x = 4x - 5$
$6x = 1$
$x = \frac{1}{6}$

f $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(x - 5) - 7$
$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} - 7$
$8 \cdot \frac{3}{8}x + 8 \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{2}x - 8 \cdot 2\frac{1}{2} - 8 \cdot 7$
$3x + 2 = 4x - 20 - 56$
$3x + 2 = 4x - 76$
$-x = -78$
$x = 78$

2 **a** $x = 3$ en $y = -1$ geeft $3a + 5 = -1$

$3a = -6$

$a = -2$

b $x = -4$ en $y = 0$ geeft $4 + b = 0$

$b = -4$

c $x = c$ en $y = c - 2$ geeft $-1\frac{1}{3}c + 5 = c - 2$

$-4c + 15 = 3c - 6$

$-7c = -21$

$c = 3$

3 **a** $G_A = at + b$

Door (30, 180) en (60, 120), dus $a = \frac{-60}{30} = -2$.

$\left.\begin{array}{l} G_A = -2t + b \\ \text{door } (30, 180) \end{array}\right\} -2 \cdot 30 + b = 180$

$-60 + b = 180$

$b = 240$

Dus $G_A = -2t + 240$.

$G_B = at + b$

Door (20, 160) en (40, 130), dus $a = \frac{-30}{20} = -1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} G_B = -1\frac{1}{2}t + b \\ \text{door } (20, 160) \end{array}\right\} -1\frac{1}{2} \cdot 20 + b = 160$

$-30 + b = 160$

$b = 190$

Dus $G_B = -1\frac{1}{2}t + 190$.

b $G_A = G_B$ geeft $-2t + 240 = -1\frac{1}{2}t + 190$

$-\frac{1}{2}t = -50$

$t = 100$

$t = 100$ geeft $G_A = -2 \cdot 100 + 240 = 40$

Dus ze moeten dan nog 40 kilometer rijden.

c $G_A = 0$ geeft $-2t + 240 = 0$

$-2t = -240$

$t = 120$

$G_B = 0$ geeft $-1\frac{1}{2}t + 190 = 0$

$-1\frac{1}{2}t = -190$

$t = 126\frac{2}{3}$

Motorrijder A komt het eerste aan.

Het tijdsverschil is $126\frac{2}{3} - 120 \approx 7$ minuten.

4 **a** $x = -5$ en $y = 20$ geeft $5 \cdot -5 - 2 \cdot 20 = -65 \neq 15$
Dus A ligt niet op m.

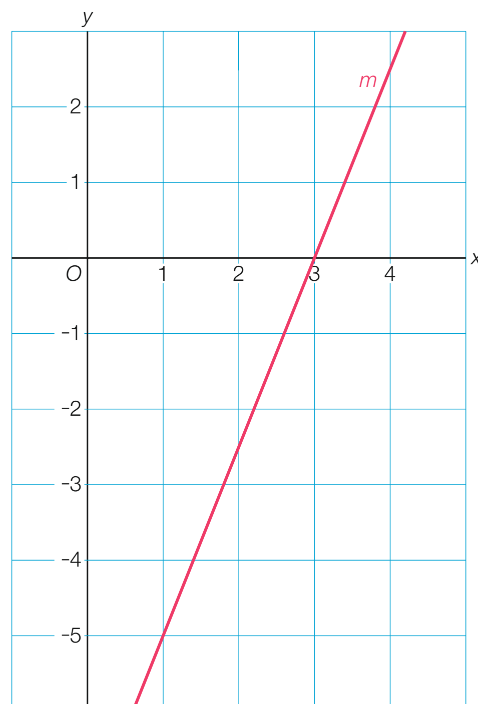
b $x = 0$ geeft $-2y = 15$, dus $y = -7\frac{1}{2}$.
Dus $B(0, -7\frac{1}{2})$.

c

x	1	3
y	-5	0

Zie de figuur hiernaast.

d $x = p$ en $y = 2p$ geeft $5p - 2 \cdot 2p = 15$
$5p - 4p = 15$
$p = 15$



5 m: $5x - 2y = 15$
$-2y = -5x + 15$
$y = 2\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$

n: $y = ax + b$
$n \mathbin{/\!/} m$, dus $a = \text{rc}_n = \text{rc}_m = 2\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-10, -15) \end{array}\right\}$ $2\frac{1}{2} \cdot -10 + b = -15$
$-25 + b = -15$
$b = 10$

$y = 2\frac{1}{2}x + 10$
$-2\frac{1}{2}x + y = 10$
$5x - 2y = -20$
Dus n: $5x - 2y = -20$.

Bladzijde 43

6 **a** $f(6) - g(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - 3 - (-1\frac{1}{2} \cdot 6 + 4) = 5$

b

x	0	4
$f(x)$	-3	-1

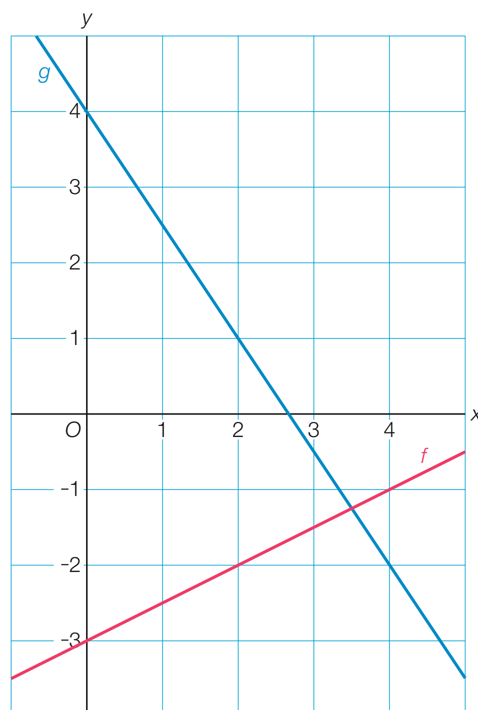
x	0	4
$g(x)$	4	-2

Zie de figuur hiernaast.

c $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = -1\frac{1}{2}x + 4$
$2x = 7$
$x = 3\frac{1}{2}$

$f(3\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} - 3 = -1\frac{1}{4}$
Dus $S(3\frac{1}{2}, -1\frac{1}{4})$.

d $y_P = g(-20) = -1\frac{1}{2} \cdot -20 + 4 = 34$



e $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 0$

$\frac{1}{2}x = 3$

$x = 6$

Dus $Q(6, 0)$.

$f(0) = -3$, dus $R(0, -3)$.

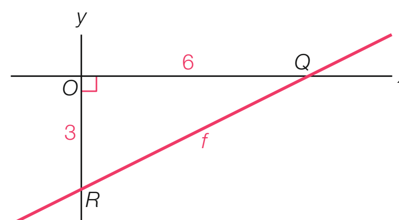
Zie de schets hiernaast.

In $\triangle OQR$ is $\angle O = 90°$, dus $QR^2 = OQ^2 + OR^2$

$QR^2 = 6^2 + 3^2 = 45$

$QR = \sqrt{45} = 6{,}70\ldots$

Dus de omtrek van $\triangle OQR$ is $6 + 3 + 6{,}70\ldots \approx 15{,}7$.



7 **a** Evenwijdig met l, dus rc = 7 en dit geeft $2a = 7$ oftewel $a = 3\frac{1}{2}$.

Dus $f(x) = 7x + b - 12$.

$f(6) = -40$ geeft $7 \cdot 6 + b - 12 = -40$

$42 + b - 12 = -40$

$30 + b = -40$

$b = -70$

b $f(0) = 40$ geeft $2a \cdot 0 + b - 12 = 40$

$b - 12 = 40$

$b = 52$

Dus $f(x) = 2ax + 40$.

$f(-4) = 0$ geeft $2a \cdot -4 + 40 = 0$

$-8a + 40 = 0$

$-8a = -40$

$a = 5$

c $g(-2) = -11$ geeft $b \cdot -2 - 3 = -11$

$-2b - 3 = -11$

$-2b = -8$

$b = 4$

$f(-2) = -11$ en $b = 4$ geeft $2a \cdot -2 + 4 - 12 = -11$

$-4a - 8 = -11$

$-4a = -3$

$a = \frac{3}{4}$

8 $f(x) = 0$ geeft $\frac{3}{4}x - 1 = 0$

$\frac{3}{4}x = 1$

$3x = 4$

$x = 1\frac{1}{3}$

Dus $A(1\frac{1}{3}, 0)$.

$g(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + 4 = 0$

$-\frac{1}{2}x = -4$

$x = 8$

Dus $B(8, 0)$.

$g(0) = 4$, dus $Q(0, 4)$.

$f(0) = -1$, dus $P(0, -1)$.

$f(x) = g(x)$ geeft $\frac{3}{4}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4$

$4 \cdot \frac{3}{4}x - 4 \cdot 1 = 4 \cdot -\frac{1}{2}x + 4 \cdot 4$

$3x - 4 = -2x + 16$

$5x = 20$

$x = 4$

$g(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 2$, dus $S(4, 2)$.

Zie de schets hiernaast.

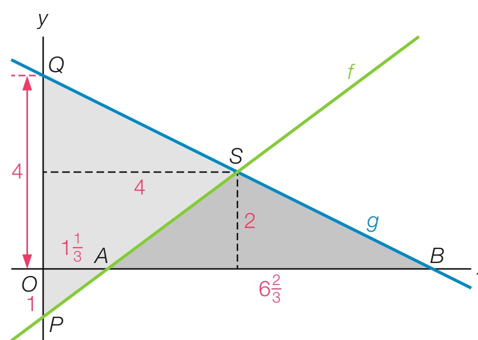
opp. $\triangle PQS = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$

opp. $\triangle ABS = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 2 = 6\frac{2}{3}$

Dus $6\frac{2}{3}a = 10$

$20a = 30$

$a = 1\frac{1}{2}$



9 $y = ax + b$

Door (10, 150) en (30, 0), dus $a = \frac{-150}{20} = -7\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -7\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (30, 0) \end{array}\right\} -7\frac{1}{2} \cdot 30 + b = 0$

$-225 + b = 0$

$b = 225$

$y = -7\frac{1}{2}x + 225$

$7\frac{1}{2}x + y = 225$

$15x + 2y = 450$

Dus k: $15x + 2y = 450$.

10 **a** $x + y = 40$

$y = -x + 40$

Uit $y = -x + 40$ en $2x - 3y = 15$ volgt $2x - 3(-x + 40) = 15$

$2x + 3x - 120 = 15$

$5x - 120 = 15$

$5x = 135$

$x = 27$

$x = 27$ invullen in $y = -x + 40$ geeft $y = -27 + 40 = 13$.

Dus $S(27, 13)$.

b $x = 27$ en $y = 13$ invullen in $x - 2y = 1$ geeft $27 - 2 \cdot 13 = 1$, dus n gaat ook door S.

Dus l, m en n gaan door één punt.

11 $\begin{cases} x + y = 55 \\ 2{,}25x + 2{,}5y = 130 \end{cases}$

$x + y = 55$

$x = -y + 55$

Uit $x = -y + 55$ en $2{,}25x + 2{,}5y = 130$ volgt $2{,}25(-y + 55) + 2{,}5y = 130$

$-2{,}25y + 123{,}75 + 2{,}5y = 130$

$0{,}25y + 123{,}75 = 130$

$0{,}25y = 6{,}25$

$y = 25$

Dus hij heeft die dag 25 bakjes blauwe druiven verkocht.

12 Er gaan vijftig docenten mee, twee in elke bus. Dus ze gaan in totaal met 25 bussen.
Er blijven 32 plaatsen onbezet, dus er zijn in totaal 1744 + 50 + 32 = 1826 plaatsen in de bussen.

$\begin{cases} x + y = 25 \\ 54x + 82y = 1826 \end{cases}$

$x + y = 25$

$x = -y + 25$

Uit $x = -y + 25$ en $54x + 82y = 1826$ volgt $54(-y + 25) + 82y = 1826$

$-54y + 1350 + 82y = 1826$

$28y + 1350 = 1826$

$28y = 476$

$y = 17$

Dus er zijn 17 dubbeldekkers nodig.

Diagnostische toets

Bladzijde 46

1 **a** $5(x - 3) = 7x + 8$

$5x - 15 = 7x + 8$

$-2x = 23$

$x = -11\frac{1}{2}$

b $\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

$15 \cdot \frac{2}{3}x - 15 \cdot 2 = 15 \cdot \frac{1}{5}x - 15 \cdot \frac{3}{5}$

$10x - 30 = 3x - 9$

$7x = 21$

$x = 3$

c $2(3x-1)=x-(3x-14)$
$6x-2=x-3x+14$
$6x-2=-2x+14$
$8x=16$
$x=2$

d $\frac{1}{6}a+4=\frac{1}{3}(a-3)-1\frac{1}{2}a$
$\frac{1}{6}a+4=\frac{1}{3}a-1-1\frac{1}{2}a$
$6\cdot\frac{1}{6}a+6\cdot 4=6\cdot\frac{1}{3}a-6\cdot 1-6\cdot 1\frac{1}{2}a$
$a+24=2a-6-9a$
$a+24=-7a-6$
$8a=-30$
$a=-3\frac{3}{4}$

2 **a** $x=3$ geeft $y=-3-9=-12\neq 6$
Dus Q ligt niet op l.
b $x=r$ en $y=12$ geeft $-2r=12$
$r=-6$
c $x=s$ en $y=s$ geeft $s=-\frac{3}{4}s+2$
$4s=-3s+8$
$7s=8$
$s=1\frac{1}{7}$

3 k: $y=ax+b$
Door $(-2,-2)$ en $(3,2)$, dus $a=\frac{4}{5}$.
$\left.\begin{array}{l} y=\frac{4}{5}x+b \\ \text{door } (3,2) \end{array}\right\} \frac{4}{5}\cdot 3+b=2$
$2\frac{2}{5}+b=2$
$b=-\frac{2}{5}$
Dus k: $y=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}$.

l: $y=ax+b$
Door $(-2,4)$ en $(2,1)$, dus $a=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$.
$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{3}{4}x+b \\ \text{door } (2,1) \end{array}\right\} -\frac{3}{4}\cdot 2+b=1$
$-1\frac{1}{2}+b=1$
$b=2\frac{1}{2}$
Dus l: $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{1}{2}$.

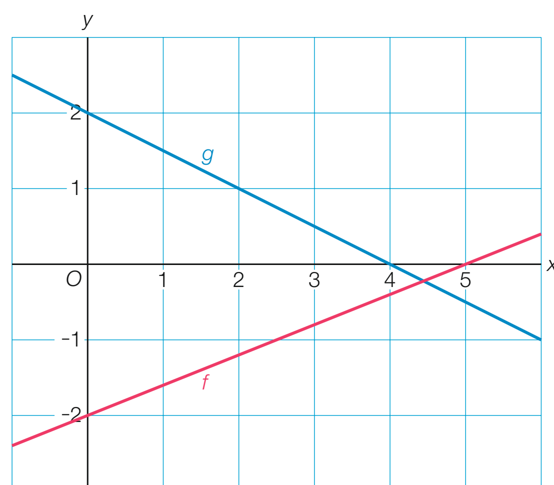
4 $P=ar+b$
Door $(-100,150)$ en $(300,-100)$, dus $a=\frac{-250}{400}=-\frac{5}{8}$.
$\left.\begin{array}{l} P=-\frac{5}{8}r+b \\ \text{door } (-100,150) \end{array}\right\} -\frac{5}{8}\cdot -100+b=150$
$62\frac{1}{2}+b=150$
$b=87\frac{1}{2}$
Dus $P=-\frac{5}{8}r+87\frac{1}{2}$.

5 **a**

x	0	5
$f(x)$	-2	0

x	0	4
$g(x)$	2	0

Zie de figuur hiernaast.



b $f(-20)=\frac{2}{5}\cdot -20-2=-10$
$g(6)=-\frac{1}{2}\cdot 6+2=-1$
c $f(-40)=\frac{2}{5}\cdot -40-2=-18$
Dus A ligt op de grafiek van f.

d $y_B = -8$, dus $g(x) = -8$

$-\frac{1}{2}x + 2 = -8$

$-x + 4 = -16$

$-x = -20$

$x = 20$

Dus $x_B = 20$.

6 **a** $f(-3) = 54$, dus $4a \cdot -3 - 18 = 54$

$-12a - 18 = 54$

$-12a = 72$

$a = -6$

b $f(-2) = a$, dus $4a \cdot -2 - 18 = a$

$-8a - 18 = a$

$-9a = 18$

$a = -2$

c Evenwijdig met m, dus rc $= \frac{1}{3}$ en dit geeft $4a = \frac{1}{3}$ oftewel $a = \frac{1}{12}$.

Bladzijde 47

7 **a** $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + 5 = 0$

$-\frac{1}{2}x = -5$

$x = 10$

Dus $A(10, 0)$.

$f(0) = 5$, dus $B(0, 5)$.

b $g(x) = 0$ geeft $2x - 10 = 0$

$2x = 10$

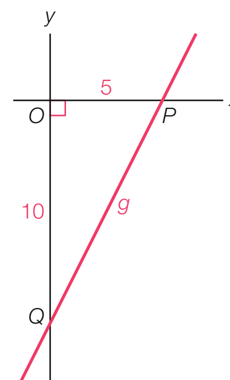
$x = 5$

Dus $P(5, 0)$.

$g(0) = -10$, dus $Q(0, -10)$.

Zie de schets hiernaast.

opp. $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$



c $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x + 5 = 2x - 10$

$-2\frac{1}{2}x = -15$

$x = 6$

$g(6) = 2 \cdot 6 - 10 = 2$

Dus $S(6, 2)$.

8 **a** $x = 45$ en $y = 70$ geeft $5 \cdot 45 - 3 \cdot 70 = 15$

Dus A ligt op l.

b $y = 0$ geeft $5x = 15$, dus $x = 3$.

Dus $B(3, 0)$.

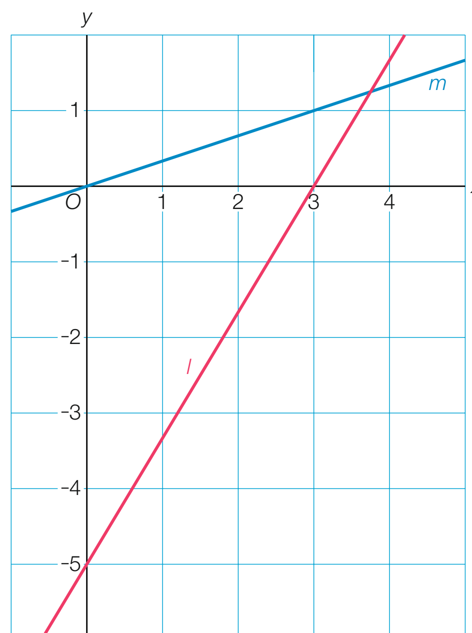
c l: $5x - 3y = 15$

x	0	3
y	-5	0

m: $x - 3y = 0$

x	0	3
y	0	1

Zie de figuur hiernaast.



d $x = p$ en $y = 2p$ geeft $5 \cdot p - 3 \cdot 2p = 15$

$5p - 6p = 15$

$-p = 15$

$p = -15$

9 **a** $3x - \frac{1}{2}y = 5$

$-\frac{1}{2}y = -3x + 5$

$y = 6x - 10$

b $y = -\frac{1}{4}x + 2$

$\frac{1}{4}x + y = 2$

$x + 4y = 8$

10 $l\colon y = ax + b$

Door $(-1, 3)$ en $(2, 1)$, dus $a = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

$\left.\begin{matrix} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (-1, 3) \end{matrix}\right\} -\frac{2}{3} \cdot -1 + b = 3$

$\frac{2}{3} + b = 3$

$b = 2\frac{1}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}x + y = 2\frac{1}{3}$

$2x + 3y = 7$

Dus $l\colon 2x + 3y = 7$.

11 $2x - y = 10$

$-y = -2x + 10$

$y = 2x - 10$

Uit $y = 2x - 10$ en $6x + 7y = 50$ volgt $6x + 7(2x - 10) = 50$

$6x + 14x - 70 = 50$

$20x - 70 = 50$

$20x = 120$

$x = 6$

$x = 6$ invullen in $y = 2x - 10$ geeft $y = 2 \cdot 6 - 10 = 2$.

Dus de oplossing is $(6, 2)$.

12 **a** $\begin{cases} 5x + 6y = 28 \\ 4x + 8y = 32 \end{cases}$

$4x + 8y = 32$

$x + 2y = 8$

$x = -2y + 8$

Uit $x = -2y + 8$ en $5x + 6y = 28$ volgt $5(-2y + 8) + 6y = 28$

$-10y + 40 + 6y = 28$

$-4y + 40 = 28$

$-4y = -12$

$y = 3$

$y = 3$ invullen in $x = -2y + 8$ geeft $x = -2 \cdot 3 + 8 = 2$.

Dus de oplossing is $(2, 3)$.

b Een zak krentenbollen kost 2 euro.

Herhaling

Bladzijde 48

1 **a** $6x - 5 = 7x - 9$
$-x = -4$
$x = 4$

b $4(t - 1) = 3(2t + 1)$
$4t - 4 = 6t + 3$
$-2t = 7$
$t = -3\frac{1}{2}$

c $2(5 - 2a) = 4 - a$
$10 - 4a = 4 - a$
$-3a = -6$
$a = 2$

d $2p - (p - 1) = 8 - 2(p - 1)$
$2p - p + 1 = 8 - 2p + 2$
$p + 1 = 10 - 2p$
$3p = 9$
$p = 3$

2 **a** $\frac{1}{3}(2 - x) - 4 = \frac{1}{2}x + 5$
$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x - 4 = \frac{1}{2}x + 5$
$6 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3}x - 6 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot 5$
$4 - 2x - 24 = 3x + 30$
$-20 - 2x = 3x + 30$
$-5x = 50$
$x = -10$

b $\frac{5}{6}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}$
$12 \cdot \frac{5}{6}x - 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 \cdot \frac{1}{3}x + 12 \cdot 1\frac{1}{2}$
$10x - 3 = 4x + 18$
$6x = 21$
$x = 3\frac{1}{2}$

c $1\frac{1}{5}(x - 1) = 2\frac{1}{10}x - (x - 2)$
$1\frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5} = 2\frac{1}{10}x - x + 2$
$10 \cdot 1\frac{1}{5}x - 10 \cdot 1\frac{1}{5} = 10 \cdot 2\frac{1}{10}x - 10x + 10 \cdot 2$
$12x - 12 = 21x - 10x + 20$
$12x - 12 = 11x + 20$
$x = 32$

d $\frac{1}{4}(x + 20) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x$
$\frac{1}{4}x + 5 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x$
$4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 5 = 4 \cdot \frac{1}{2}x - 4 \cdot \frac{3}{4}x$
$x + 20 = 2x - 3x$
$x + 20 = -x$
$2x = -20$
$x = -10$

3 **a** $x = 10$ geeft $y = -3 \cdot 10 + 4 = -26$
Dus de y-coördinaat van A is -26.

b $x = -8$ geeft $y = -3 \cdot -8 + 4 = 28$
Dus B ligt op l.

c $x = 12$ en $y = c$ geeft $c = -3 \cdot 12 + 4 = -32$

d $x = d$ en $y = -2$ geeft $-3d + 4 = -2$
$-3d = -6$
$d = 2$

e $x = e$ en $y = e$ geeft $-3e + 4 = e$
$-4e = -4$
$e = 1$

4 **a** Vanuit het punt $(-1, -2)$ naar het punt $(3, 1)$ ga je 4 naar rechts en 3 omhoog.
Dit geeft $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{3}{4}$.

b $\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (3, 1) \end{array}\right\} \frac{3}{4} \cdot 3 + b = 1$
$2\frac{1}{4} + b = 1$
$b = -1\frac{1}{4}$
Dus k: $y = \frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$.

c l: $y = ax + b$
Door $(-1, 1)$ en $(1, -2)$ geeft $a = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$.
$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (1, -2) \end{array}\right\} -1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = -2$
$-1\frac{1}{2} + b = -2$
$b = -\frac{1}{2}$
Dus l: $y = -1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Bladzijde 49

5 **a** Op de lijn liggen bijvoorbeeld de roosterpunten (100, 200) en (250, 100).

b Van (100, 200) naar (250, 100) ga je 150 naar rechts en 100 omlaag, dus $a = \frac{-100}{150} = -\frac{2}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} V = -\frac{2}{3}s + b \\ \text{door } (100, 200) \end{array}\right\} -\frac{2}{3} \cdot 100 + b = 200$

$-66\frac{2}{3} + b = 200$

$b = 266\frac{2}{3}$

Dus $V = -\frac{2}{3}s + 266\frac{2}{3}$.

6 **a** $f(-10) = -2 \cdot -10 + 3 = 23$
$f(20) = -2 \cdot 20 + 3 = -37$

b $f(10) = -2 \cdot 10 + 3 = -17$, dus het punt $(10, -17)$ ligt op de grafiek van f.

c $f(25) = -2 \cdot 25 + 3 = -47 \neq -53$
Dus het punt $(25, -53)$ ligt niet op de grafiek van f.

d $f(x) = 19$, dus $-2x + 3 = 19$
$-2x = 16$
$x = -8$
Dus de x-coördinaat van P is -8.

e $y_Q = -10$, dus $f(x) = -10$
$-2x + 3 = -10$
$-2x = -13$
$x = 6\frac{1}{2}$
Dus $x_Q = 6\frac{1}{2}$.

7 **a** $f(-3) = 17$ geeft $\frac{1}{3}a \cdot -3 + 20 = 17$
$-a + 20 = 17$
$-a = -3$
$a = 3$

b Evenwijdig met k, dus rc = 8 en dit geeft $\frac{1}{3}a = 8$, dus $a = 24$.

c $f(9) = a$ geeft $\frac{1}{3}a \cdot 9 + 20 = a$
$3a + 20 = a$
$2a = -20$
$a = -10$

8 **a** $f(x) = 0$ geeft $5x - 20 = 0$
$5x = 20$
$x = 4$
Dus $x_A = 4$ en $A(4, 0)$.

b $f(0) = -20$, dus $y_B = -20$ en $B(0, -20)$.

c $g(x) = 0$ geeft $-2x + 7 = 0$
$-2x = -7$
$x = 3\frac{1}{2}$
Dus het snijpunt met de x-as is $(3\frac{1}{2}, 0)$.
$g(0) = 7$, dus het snijpunt met de y-as is $(0, 7)$.

Bladzijde 50

9 **a** $h(x) = 0$ geeft $-2\frac{1}{2}x + 10 = 0$
$-2\frac{1}{2}x = -10$
$x = 4$
Dus $A(4, 0)$.
$h(0) = 10$, dus $B(0, 10)$.

b $OA = 4$ en $OB = 10$

c opp. $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20$

10 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}x + 4$

$4 \cdot \frac{3}{4}x - 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot -1\frac{1}{2}x + 4 \cdot 4$

$3x - 2 = -6x + 16$

$9x = 18$

$x = 2$

Dus $x_S = 2$.

b $y_S = g(2) = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 1$

Dus $S(2, 1)$.

11 **a** $x = 12$ en $y = -1$ geeft $12 + 2 \cdot -1 = 10$, dus A ligt op l.

b $x = -6$ en $y = 8$ geeft $-6 + 2 \cdot 8 = 10$, dus B ligt op l.

c $x = 0$ geeft $2y = 10$ oftewel $y = 5$, dus het snijpunt met de y-as is $(0, 5)$.

d $y = 0$ geeft $x = 10$, dus het snijpunt met de x-as is $(10, 0)$.

e $x = p$ en $y = 2p$ geeft $p + 2 \cdot 2p = 10$

$p + 4p = 10$

$5p = 10$

$p = 2$

12 **a**

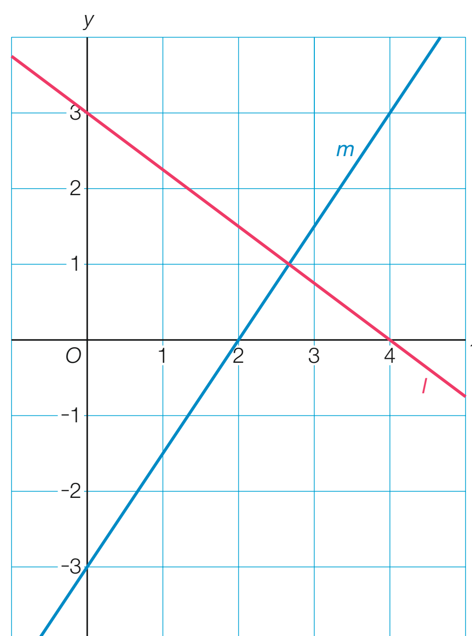
x	0	4
y	3	0

b Zie de figuur hiernaast.

c

x	0	2
y	-3	0

Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 51

13 **a**

x	0	0
y	0	0

Je kunt m nu nog niet tekenen omdat je maar één punt van m weet, namelijk het punt $(0, 0)$.

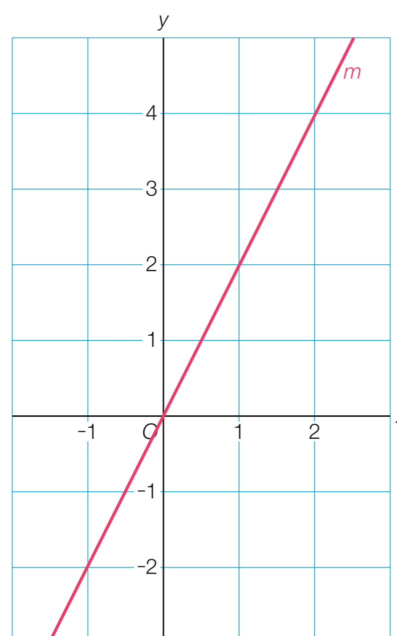
b $x = 2$ geeft $2 \cdot 2 - y = 0$

$4 - y = 0$

$y = 4$

Je weet nu het punt $(2, 4)$.

c Zie de figuur hiernaast.



14 **a** $3x + y = 7$
$y = -3x + 7$
b $5x - 2y = 10$
$-2y = -5x + 10$
$y = 2\frac{1}{2}x - 5$
c $y = -3x + 12$
$3x + y = 12$
d $y = \frac{1}{3}x - 2$
$-\frac{1}{3}x + y = -2$
$x - 3y = 6$

15 **a** $5x + y = 11$
$y = -5x + 11$
b $2x - 3(-5x + 11) = 18$
c $2x - 3(-5x + 11) = 18$
$2x + 15x - 33 = 18$
$17x - 33 = 18$
$17x = 51$
$x = 3$
d $x = 3$ invullen in $y = -5x + 11$ geeft $y = -5 \cdot 3 + 11 = -4$.
e De oplossing is $(3, -4)$.

16 $4x + y = 11$
$y = -4x + 11$
Uit $y = -4x + 11$ en $3x - 2y = 11$ volgt $3x - 2(-4x + 11) = 11$
$3x + 8x - 22 = 11$
$11x - 22 = 11$
$11x = 33$
$x = 3$
$x = 3$ invullen in $y = -4x + 11$ geeft $y = -4 \cdot 3 + 11 = -1$.
De oplossing is $(3, -1)$.

$x + 5y = 13$
$x = -5y + 13$
Uit $x = -5y + 13$ en $3x - 2y = 5$ volgt $3(-5y + 13) - 2y = 5$
$-15y + 39 - 2y = 5$
$-17y + 39 = 5$
$-17y = -34$
$y = 2$
$y = 2$ invullen in $x = -5y + 13$ geeft $x = 13 - 5 \cdot 2 = 3$.
De oplossing is $(3, 2)$.

17 **a** Een reep chocolade kost x euro en drie blikjes fris kosten $3y$ euro, dus $x + 3y = 5{,}5$.
Vier repen chocolade kosten $4x$ euro en vijf blikjes fris kosten $5y$ euro, dus $4x + 5y = 11{,}5$.
b $\begin{cases} x + 3y = 5{,}5 \\ 4x + 5y = 11{,}5 \end{cases}$
$x + 3y = 5{,}5$
$x = -3y + 5{,}5$
Uit $x = -3y + 5{,}5$ en $4x + 5y = 11{,}5$ volgt $4(-3y + 5{,}5) + 5y = 11{,}5$
$-12y + 22 + 5y = 11{,}5$
$-7y + 22 = 11{,}5$
$-7y = -10{,}5$
$y = 1{,}5$
$y = 1{,}5$ invullen in $x = -3y + 5{,}5$ geeft $x = 5{,}5 - 3 \cdot 1{,}5 = 1$.
Dus de oplossing is $(1; 1{,}5)$.
c Een blikje fris kost 1,50 euro.

Onderzoek Hartslag en fitheid

Bladzijde 52

1 **a**, **b**, **c** *

2 *

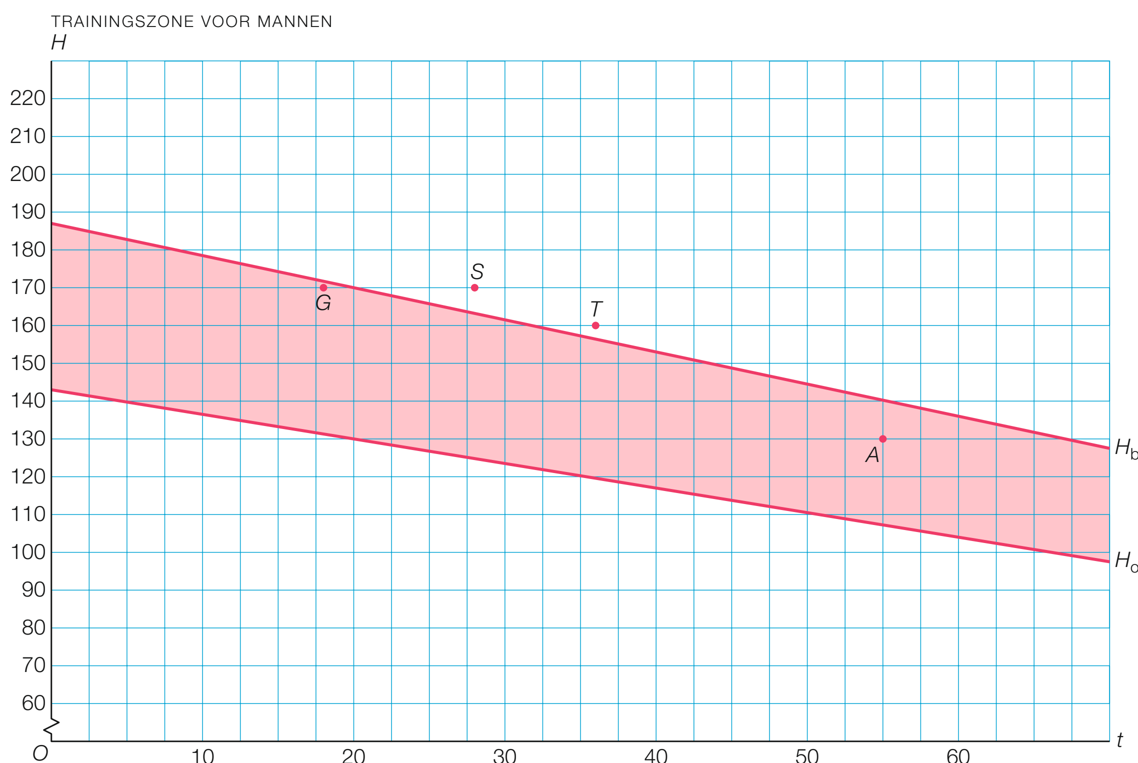
3 **a** De bovengrens is 85% van de maximale hartslag. Dit geeft $H_b = 0{,}85(220 - t) = 187 - 0{,}85t$.

b $H_o = 0{,}65(220 - t) = 143 - 0{,}65t$

c, **d**

t	0	20
H_b	187	170

t	0	20
H_o	143	130



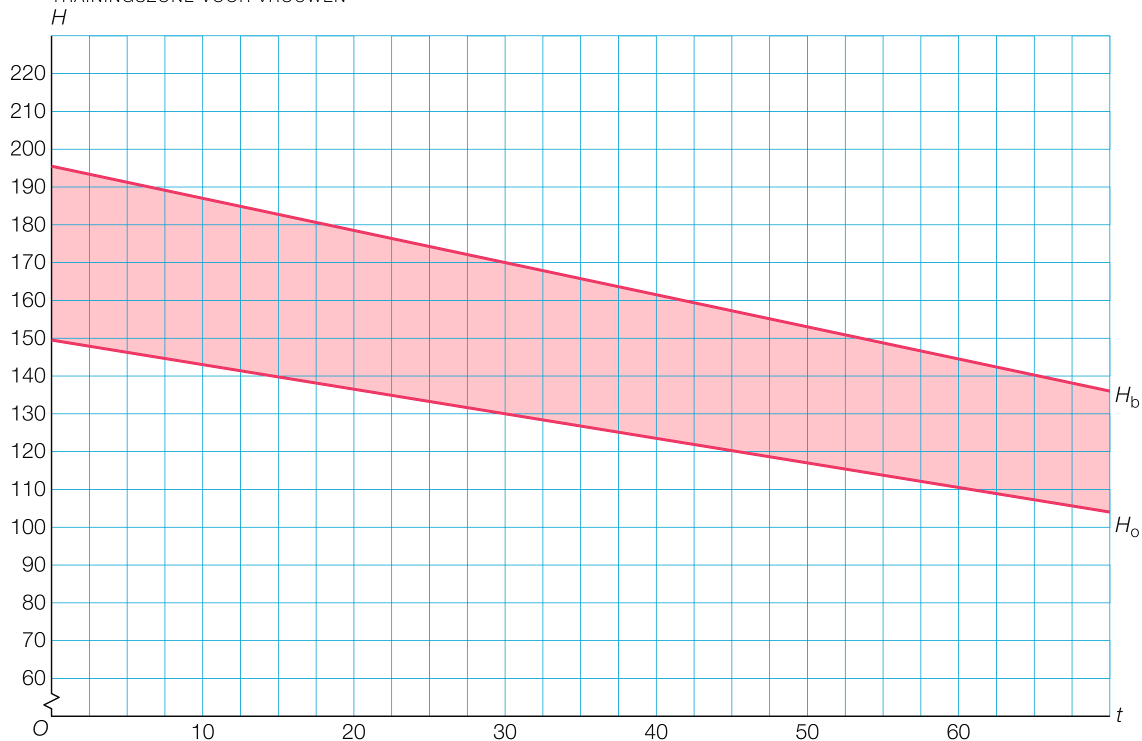
d Zie hierboven de gegevens van de mannen als punten in de figuur.
Alex traint het effectiefste, want hij zit met zijn hartslag in de trainingszone.
Glen traint ook effectief, omdat hij met zijn hartslag in de trainingszone zit. Maar hij zit met zijn hartslag dichter bij de bovengrens dan Alex. Bij Glen is het daarom aannemelijker dat er momenten tijdens de training zijn dat hij boven deze grens komt.

Bladzijde 53

e $H_o = 0{,}65(230 - t) = 149{,}5 - 0{,}65t$
$H_b = 0{,}85(230 - t) = 195{,}5 - 0{,}85t$

t	30	50
H_o	130	117

t	30	50
H_b	170	153



f $149{,}5 - 0{,}65t = 140$
$-0{,}65t = -9{,}5$
$t \approx 14{,}6$

$195{,}5 - 0{,}85t = 140$
$-0{,}85t = -55{,}5$
$t \approx 65{,}3$

Eva is minstens 15 en hoogstens 65 jaar oud.

4 **a** 4 minuten is $4 \cdot 60 = 240$ seconden.
$F = \dfrac{100 \cdot 240}{62 + 55 + 50} \approx 144$, dus uitstekend.

b 3 minuten is $3 \cdot 60 = 180$ seconden.
$\dfrac{100 \cdot 180}{H_1 + H_2 + H_3} = 60$
$\dfrac{18\,000}{H_1 + H_2 + H_3} = 60$
$H_1 + H_2 + H_3 = 300$, want $\dfrac{18\,000}{300} = 60$.

c $F = \dfrac{100 \cdot 240}{H_1 + H_2 + H_3} = \dfrac{24\,000}{H_1 + H_2 + H_3}$, dus $\dfrac{24\,000}{H_1 + H_2 + H_3} = 75$.
$H_1 + H_2 + H_3 = 320$, want $\dfrac{24\,000}{320} = 75$.
$H_1 = H_2 + 5$ en $H_3 = H_2 - 5$.
Dus $H_1 + H_2 + H_3 = H_2 + 5 + H_2 + H_2 - 5 = 3 \cdot H_2 = 320$.
$3 \cdot H_2 = 320$ geeft $H_2 = 106\frac{2}{3}$, dus $H_3 = 106\frac{2}{3} - 5 \approx 102$.

5 *

2 Gelijkvormigheid

Voorkennis De stelling van Pythagoras

Bladzijde 56

1 $\angle C = 90°$, dus $AC^2 + BC^2 = AB^2$
$5^2 + 2^2 = AB^2$
$AB^2 = 29$
$AB = \sqrt{29} \approx 5{,}39$ cm
$\angle D = 90°$, dus $DE^2 + DF^2 = EF^2$
$DE^2 + 3^2 = 5{,}8^2$
$DE^2 = 5{,}8^2 - 3^2 = 24{,}64$
$DE = \sqrt{24{,}64} \approx 4{,}96$ cm
In $\triangle QRS$ is $\angle S = 90°$, dus $QS^2 + RS^2 = QR^2$
$QS^2 + 4^2 = 4{,}6^2$
$QS^2 = 4{,}6^2 - 4^2 = 5{,}16$
$QS = \sqrt{5{,}16} = 2{,}271\ldots$
Dus $PQ = 2 \cdot 2{,}271\ldots \approx 4{,}54$ cm.

2 In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BD^2 + CD^2 = BC^2$
$2{,}8^2 + 4{,}5^2 = BC^2$
$BC^2 = 28{,}09$
$BC = \sqrt{28{,}09} = 5{,}3$
In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$
$AD^2 + 4{,}5^2 = 9{,}1^2$
$AD^2 = 9{,}1^2 - 4{,}5^2 = 62{,}56$
$AD = \sqrt{62{,}56} = 7{,}90\ldots$
De omtrek van $\triangle ABC$ is $7{,}90\ldots + 2{,}8 + 5{,}3 + 9{,}1 \approx 25{,}1$ cm.

2.1 Gelijkvormigheid

Bladzijde 57

1

3	12	2	20	300
5	20	$3\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	500

2 $2 \cdot 25 = 50$ en $10 \cdot 5 = 50$, dus $2 \cdot 25 = 10 \cdot 5$.
$10 \cdot 21 = 210$ en $14 \cdot 15 = 210$, dus $10 \cdot 21 = 14 \cdot 15$.
De twee vermenigvuldigingen hebben steeds dezelfde uitkomst.

Bladzijde 58

3 **a** $x = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$ **b** $x = \frac{2{,}3 \cdot 12}{4} = 6{,}9$ **c** $x = \frac{5 \cdot 30}{9} = 16\frac{2}{3}$

4 **a** $5(x - 1) = 3(x + 3)$
$5x - 5 = 3x + 9$
$2x = 14$
$x = 7$

b $x = \frac{9 \cdot 15}{4} = 33\frac{3}{4}$

c $12(x - 1) = 5 \cdot 7{,}2$
$12x - 12 = 36$
$12x = 48$
$x = 4$

Bladzijde 59

5 $18(y + 20) = 11\frac{1}{4} \cdot 2y$

$18y + 360 = 22\frac{1}{2}y$

$-4\frac{1}{2}y = -360$

$y = 80$

Bij deze manier krijg je te maken met breuken. Dat rekent minder prettig.
Verder kan er bij het berekenen van x een fout zijn gemaakt. In dat geval werkt deze fout door in de berekening van y en krijg je ook een verkeerde waarde van y.

6 **a** $\begin{array}{c|c} 6 & 9 \\ \hline 21 & x \end{array}$ geeft $x = \frac{21 \cdot 9}{6} = 31\frac{1}{2}$

$\begin{array}{c|c} 6 & y \\ \hline 21 & 84 \end{array}$ geeft $y = \frac{6 \cdot 84}{21} = 24$

b $\begin{array}{c|c} 8 & x - 3 \\ \hline 15 & x + 7{,}5 \end{array}$ geeft $15(x - 3) = 8(x + 7{,}5)$

$15x - 45 = 8x + 60$

$7x = 105$

$x = 15$

$\begin{array}{c|c} 8 & 2y \\ \hline 15 & y - 11 \end{array}$ geeft $15 \cdot 2y = 8(y - 11)$

$30y = 8y - 88$

$22y = -88$

$y = -4$

c $\begin{array}{c|c} 2x & 1 - x \\ \hline 4 & 3 \end{array}$ geeft $2x \cdot 3 = 4(1 - x)$

$6x = 4 - 4x$

$10x = 4$

$x = \frac{2}{5}$

$\begin{array}{c|c} 2 \cdot \frac{2}{5} & 3y \\ \hline 4 & 15 \end{array}$ geeft $4 \cdot 3y = \frac{4}{5} \cdot 15$

$12y = 12$

$y = 1$

7 **a** $\begin{array}{c|c} 18 & x \\ \hline 25 & 17 \end{array}$ geeft $x = \frac{17 \cdot 18}{25} = 12\frac{6}{25}$

$\begin{array}{c|c} 18 & 81 \\ \hline 25 & y \end{array}$ geeft $y = \frac{25 \cdot 81}{18} = 112\frac{1}{2}$

b $\begin{array}{c|c} 15 & x + 3 \\ \hline 7 & x \end{array}$ geeft $15x = 7(x + 3)$

$15x = 7x + 21$

$8x = 21$

$x = 2\frac{5}{8}$

$\begin{array}{c|c} 15 & y \\ \hline 7 & y - 5 \end{array}$ geeft $15(y - 5) = 7y$

$15y - 75 = 7y$

$8y = 75$

$y = 9\frac{3}{8}$

c $\begin{array}{c|c} x + 5 & x \\ \hline 2 & 3 \end{array}$ geeft $3(x + 5) = 2x$

$3x + 15 = 2x$

$x = -15$

$\begin{array}{c|c} -15 & 4y \\ \hline 3 & 1 - y \end{array}$ geeft $-15(1 - y) = 3 \cdot 4y$

$-15 + 15y = 12y$

$3y = 15$

$y = 5$

L1 **a** $x = \frac{7 \cdot 96}{16} = 42$

b $2x = 3(5 - x)$
$2x = 15 - 3x$
$5x = 15$
$x = 3$

c

$3x$	$21 - x$
2	4

geeft $3x \cdot 4 = 2(21 - x)$
$12x = 42 - 2x$
$14x = 42$
$x = 3$

$3 \cdot 3$	y
2	6

geeft $y = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$

Bladzijde 60

8 **a** De vergrotingsfactor is $k = \frac{EF}{BC} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

b $AB = \frac{19{,}2}{1{,}6} = 12$ cm
$DF = 1{,}6 \cdot 9 = 14{,}4$ cm

c Uit

AB	BC	AC
DE	EF	DF

volgt

12	5	9
19,2	8	14,4

.

d De tabel is een verhoudingstabel omdat elk getal in de onderste rij 1,6 keer zo groot is als het getal dat erboven staat.

Bladzijde 61

9 **a** $\triangle ABC \sim \triangle QRP$

b

AB	BC	AC
QR	RP	QP

geeft

18	16	12
8	RP	QP

$PQ = \frac{8 \cdot 12}{18} = 5\frac{1}{3}$ en $PR = \frac{8 \cdot 16}{18} = 7\frac{1}{9}$.

10 **a** $\triangle PQR \sim \triangle PTS$

b

PQ	QR	PR
PT	TS	PS

geeft

12	8	7
5	TS	PS

$PS = \frac{5 \cdot 7}{12} = 2\frac{11}{12}$ en $ST = \frac{5 \cdot 8}{12} = 3\frac{1}{3}$.

11 **a** $\triangle ABC \sim \triangle EBD$

b

AB	BC	AC
EB	BD	ED

geeft

6,1	3,2	4,3
EB	BD	7,6

$BD = \frac{3{,}2 \cdot 7{,}6}{4{,}3} \approx 5{,}7$ en $BE = \frac{6{,}1 \cdot 7{,}6}{4{,}3} \approx 10{,}8$.

Bladzijde 62

L2 **a** $\triangle KLM \sim \triangle RPQ$

b $\begin{array}{c|c|c} KL & LM & KM \\ \hline RP & PQ & RQ \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} 35 & 23 & 31 \\ \hline 14 & PQ & RQ \end{array}$

c $PQ = \frac{14 \cdot 23}{35} = 9{,}2$ en $QR = \frac{14 \cdot 31}{35} = 12{,}4$.

12 **a** Waarschijnlijk niet, want het zou wel heel toevallig zijn als Kees en Maaike zijde AB precies even lang tekenen.

b Ja, de driehoeken zijn waarschijnlijk niet even groot maar hebben wel dezelfde vorm doordat ze drie paar gelijke hoeken hebben.

Bladzijde 63

13 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (gegeven)} \\ \angle B = \angle E \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (hh)}$

b $\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline AE & ED & AD \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} 6 & 4 & 3 \\ \hline 8 & ED & AD \end{array}$

$AD = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$, $DE = \frac{8 \cdot 4}{6} = 5\frac{1}{3}$ en $CD = AD - AC = 4 - 3 = 1$.

14 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle C_1 = \angle D \text{ (= 90°)} \end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (hh)}$

b In $\triangle ABC$ is $\angle C_1 = 90°$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

$AB = \sqrt{25} = 5$

$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline AE & ED & AD \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} 5 & 4 & 3 \\ \hline AE & 9 & AD \end{array}$

$AE = \frac{5 \cdot 9}{4} = 11\frac{1}{4}$ en $AD = \frac{9 \cdot 3}{4} = 6\frac{3}{4}$.

15 $\left.\begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle A = \angle E \text{ (= 90°)} \end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD \text{ (hh)}$

In $\triangle BDE$ is $\angle E = 90°$, dus $BD^2 = BE^2 + DE^2$

$BD^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$BD = \sqrt{169} = 13$

$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline EB & BD & ED \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} 18 & BC & AC \\ \hline 12 & 13 & 5 \end{array}$

$BC = \frac{18 \cdot 13}{12} = 19\frac{1}{2}$ en $CE = BC - BE = 19\frac{1}{2} - 12 = 7\frac{1}{2}$.

Bladzijde 64

16 $\left.\begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD) \\ \angle C_{12} = \angle D \text{ (= 90°)} \end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (hh)}$

In $\triangle ABC$ is $\angle C_{12} = 90°$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$

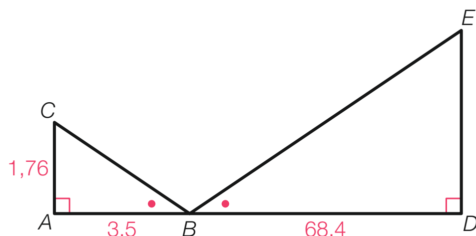
$AB^2 = 20^2 + 15^2 = 625$

$AB = \sqrt{625} = 25$

$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline AC & CD & AD \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} 25 & 15 & 20 \\ \hline 20 & CD & AD \end{array}$

$AD = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16$ en $BD = AB - AD = 25 - 16 = 9$.

17 **a**



b $\angle B$ (in $\triangle ABC$) $= \angle B$ (in $\triangle BDE$) (gegeven) ; $\angle A = \angle D$ ($= 90°$) $\}$ $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (hh)

AB	BC	AC
DB	BE	DE

geeft

3,5	BC	1,76
68,4	BE	DE

$DE = \frac{68{,}4 \cdot 1{,}76}{3{,}5} \approx 34{,}4$

Dus de hoogte van de mast is 34,4 meter.

18 Zie de schets hiernaast.

$\angle B$ (in $\triangle BCE$) $= \angle C$ (in $\triangle ACD$) (gegeven) ; $\angle C$ (in $\triangle BCE$) $= \angle A$ ($= 90°$) $\}$ $\triangle BCE \sim \triangle CAD$ (hh)

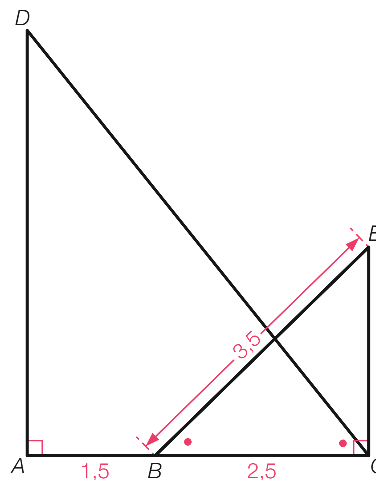
BC	CE	BE
CA	AD	CD

geeft

2,5	CE	3,5
4	AD	CD

$CD = \frac{4 \cdot 3{,}5}{2{,}5} = 5{,}6$

Dus de ladder is 5,6 meter.



L3 $\angle P$ (in $\triangle PQR$) $= \angle P$ (in $\triangle PST$) ; $\angle R = \angle S$ ($= 90°$) $\}$ $\triangle PQR \sim \triangle PTS$ (hh)

2.2 Gelijkvormige driehoeken

Bladzijde 65

19 **a** $\angle F_1 = \angle F_3$ (overstaande hoeken)

b $\angle A = \angle B_2$ (F-hoeken)

c $\angle D_2 = \angle E$ (Z-hoeken)

Bladzijde 66

20 **a** $\angle A = \angle D_1$ (F-hoeken) ; $\angle C$ (in $\triangle ABC$) $= \angle C$ (in $\triangle CDE$) $\}$ $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (hh)

b

AB	BC	AC
DE	EC	DC

geeft

30	BC	AC
20	21	24

$AC = \frac{30 \cdot 24}{20} = 36$ en $AD = AC - CD = 36 - 24 = 12$.

$BC = \frac{30 \cdot 21}{20} = 31\frac{1}{2}$ en $BE = BC - CE = 31\frac{1}{2} - 21 = 10\frac{1}{2}$.

21 In $\triangle QRS$ is $\angle R = 90°$, dus $QS^2 = QR^2 + RS^2$

$QS^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$QS = \sqrt{100} = 10$

$\angle P = \angle R$ ($= 90°$) ; $\angle T = \angle S$ (Z-hoeken) $\}$ $\triangle PQT \sim \triangle RQS$ (hh)

PQ	QT	PT
RQ	QS	RS

geeft

20	QT	PT
8	10	6

$PT = \frac{20 \cdot 6}{8} = 15$ en $QT = \frac{20 \cdot 10}{8} = 25$.

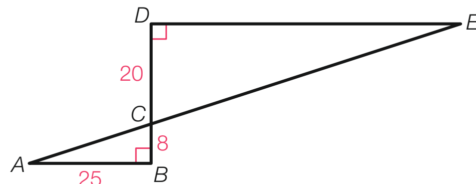
22 $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle APQ) = \angle D \text{ (F-hoeken)} \\ \angle P \text{ (in } \triangle APQ) = \angle P \text{ (in } \triangle CDP)\end{array}\right\} \triangle APQ \sim \triangle DPC \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} AP & PQ & AQ \\ \hline DP & PC & DC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 3 & PQ & AQ \\ \hline 9 & PC & 12 \end{array}$$

$AQ = \dfrac{3 \cdot 12}{9} = 4$

Bladzijde 67

23 Zie de schets hiernaast.



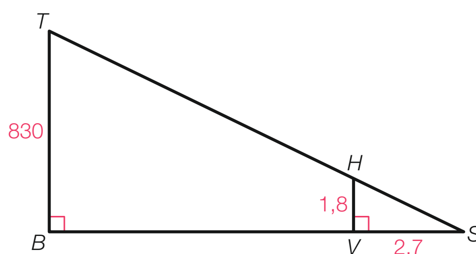
$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle D \ (= 90°) \\ \angle A = \angle E \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline ED & DC & EC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 25 & 8 & AC \\ \hline ED & 20 & EC \end{array}$$

$DE = \dfrac{25 \cdot 20}{8} = 62{,}5$

Dus de breedte van het kanaal is 62,5 meter.

24 Zie de schets hiernaast.



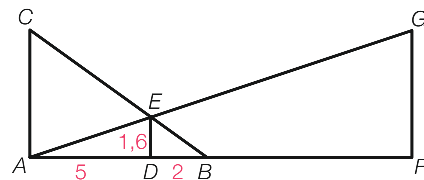
$\left.\begin{array}{l}\angle V = \angle B \ (= 90°) \\ \angle S \text{ (in } \triangle HVS) = \angle S \text{ (in } \triangle BST)\end{array}\right\} \triangle HVS \sim \triangle TBS \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} HV & VS & HS \\ \hline TB & BS & TS \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 1{,}8 & 2{,}7 & HS \\ \hline 830 & BS & TS \end{array}$$

$BS = \dfrac{2{,}7 \cdot 830}{1{,}8} = 1245$ en $BV = 1245 - 2{,}7 \approx 1242$.

Dus hij moet nog ongeveer 1242 meter lopen.

25 Zie de schets hiernaast met $DE = 160$ cm $= 1{,}6$ m.



$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D \ (= 90°) \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE)\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline DB & BE & DE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 7 & BC & AC \\ \hline 2 & BE & 1{,}6 \end{array}$$

$AC = \dfrac{7 \cdot 1{,}6}{2} = 5{,}6$, dus ook $FG = 5{,}6$.

$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle AFG) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle F = \angle D \ (= 90°)\end{array}\right\} \triangle AFG \sim \triangle ADE \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} AF & FG & AG \\ \hline AD & DE & AE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} AF & 5{,}6 & AG \\ \hline 5 & 1{,}6 & AE \end{array}$$

$AF = \dfrac{5 \cdot 5{,}6}{1{,}6} = 17{,}5$

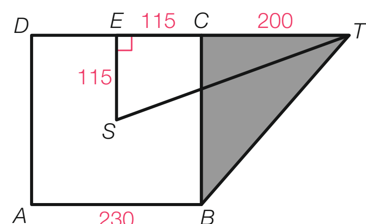
Dus de afstand tussen de lantaarnpalen is 17,5 meter.

26 Zie de schets hiernaast.

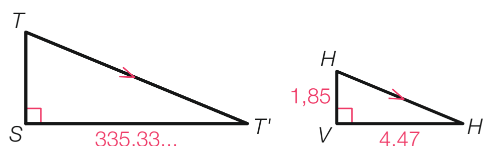
In $\triangle EST'$ is $\angle E = 90°$, dus $ST'^2 = ES^2 + ET'^2$

$ST'^2 = 115^2 + 315^2 = 112\,450$

$ST' = \sqrt{112\,450} = 335{,}33\ldots$



Zie de schets hiernaast. Bram geven we aan met het lijnstuk HV en zijn schaduw met het lijnstuk $H'V$.



$\left.\begin{array}{l}\angle S = \angle V \ (= 90°) \\ \angle T' = \angle H' \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle STT' \sim \triangle VHH' \text{ (hh)}$

$$\begin{array}{c|c|c} ST & TT' & ST' \\ \hline VH & HH' & VH' \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} ST & TT' & 335{,}33\ldots \\ \hline 1{,}85 & HH' & 4{,}47 \end{array}$$

$ST = \dfrac{1{,}85 \cdot 335{,}33\ldots}{4{,}47} = 138{,}7\ldots$

Dus de hoogte van de piramide is ongeveer 139 meter.

Bladzijde 68

L4 $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D_2 \text{ (F-hoeken)}\\ \angle B = \angle E_2 \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle DEC$ (hh)

27 **a** $\begin{array}{c|c|c} PQ & QT & PT \\ \hline PR & RS & PS \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} PQ & 1{,}8 & PT \\ \hline PR & 3{,}1 & PS \end{array}$

b Het lukt niet om PQ te berekenen omdat je PR niet weet.

c $PQ = x$ en $PR = x + 2{,}6$ geeft $\begin{array}{c|c|c} x & 1{,}8 & PT \\ \hline x+2{,}6 & 3{,}1 & PS \end{array}$.

Hieruit volgt $3{,}1x = 1{,}8(x + 2{,}6)$
$3{,}1x = 1{,}8x + 4{,}68$
$1{,}3x = 4{,}68$
$x = 3{,}6$
Dus $PQ = 3{,}6$.

Bladzijde 69

28 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D_2 \text{ (F-hoeken)}\\ \angle C = \angle E \text{ (= 90°)}\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle DBE$ (hh)

Stel $BE = x$, dan is $BC = x + 8{,}4$.

$\begin{array}{c|c} AC & BC \\ \hline DE & BE \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 6 & x+8{,}4 \\ \hline 1{,}8 & x \end{array}$

b Uit de verhoudingstabel volgt $6x = 1{,}8(x + 8{,}4)$
$6x = 1{,}8x + 15{,}12$
$4{,}2x = 15{,}12$
$x = 3{,}6$
Dus $BE = 3{,}6$.

29 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle E \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle A = \angle D \text{ (= 90°)}\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle DEC$ (hh)

Stel $AC = x$, dan is $CD = 66 - x$.

$\begin{array}{c|c} AC & BC \\ \hline DC & EC \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} x & 62 \\ \hline 66-x & 26 \end{array}$

$26x = 62(66 - x)$
$26x = 4092 - 62x$
$88x = 4092$
$x = 46{,}5$
Dus $AC = 46{,}5$.

b In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$
$AB^2 + 46{,}5^2 = 62^2$
$AB^2 = 62^2 - 46{,}5^2 = 1681{,}75$
$AB = \sqrt{16{,}8175} = 41{,}00\ldots$
opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 41{,}00\ldots \cdot 46{,}5 \approx 953{,}5$

Bladzijde 70

30 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle Q \text{ (in } \triangle ABQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle CPQ)\\ \angle B = \angle C \text{ (= 90°)}\end{array}\right\}\ \triangle ABQ \sim \triangle PCQ$ (hh)

$\begin{array}{c|c} AB & BQ \\ \hline PC & CQ \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 8 & 7 \\ \hline PC & 3 \end{array}$

$CP = \frac{8 \cdot 3}{7} = 3\frac{3}{7}$

b $DP = CD - CP = 8 - 3\frac{3}{7} = 4\frac{4}{7}$
In $\triangle ADP$ is $\angle D = 90°$, dus $AP^2 = AD^2 + DP^2$
$AP^2 = 4^2 + (4\frac{4}{7})^2 = 36{,}89\ldots$
$AP = \sqrt{36{,}89\ldots} \approx 6{,}1$

31 $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ADS) = \angle C \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D \text{ (in } \triangle ADS) = \angle E \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ADS \sim \triangle CES \text{ (hh)}$

In $\triangle CDE$ is $\angle C = 90°$, dus $DE^2 = CD^2 + CE^2$

$DE^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$DE = \sqrt{169} = 13$

Stel $DS = x$, dan is $ES = 13 - x$.

AD	DS	geeft	7	x
CE	ES		5	$13 - x$

$5x = 7(13 - x)$

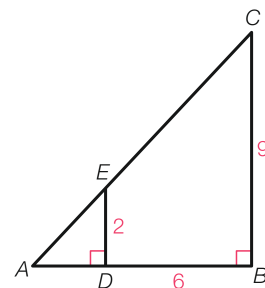
$5x = 91 - 7x$

$12x = 91$

$x \approx 7{,}6$

Dus $DS \approx 7{,}6$.

32 **a** Zie de schets hiernaast.



$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle B = \angle D \text{ (} = 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (hh)}$

Stel $AD = x$, dan is $AB = x + 6$.

AB	BC	geeft	$x + 6$	9
AD	DE		x	2

$9x = 2(x + 6)$

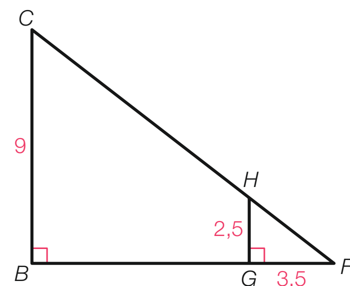
$9x = 2x + 12$

$7x = 12$

$x = 1{,}71\ldots$

Dus de lengte van de schaduw van de linkermuur is ongeveer 1,7 meter.

b Zie de schets hiernaast.



$\left.\begin{array}{l}\angle F \text{ (in } \triangle BCF) = \angle F \text{ (in } \triangle FGH) \\ \angle B = \angle G \text{ (} = 90°)\end{array}\right\} \triangle BFC \sim \triangle GFH \text{ (hh)}$

BF	BC	geeft	BF	9
GF	GH		$3{,}5$	$2{,}5$

$BF = \dfrac{9 \cdot 3{,}5}{2{,}5} = 12{,}6$

De afstand van de lantaarnpaal tot de rechtermuur is $12{,}6 - 3{,}5 = 9{,}1$ meter.

Dus de lantaarnpaal staat niet even ver van de linker- als de rechtermuur.

33 $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABS) = \angle C \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABS) = \angle D \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ (hh)}$

In $\triangle BCD$ is $\angle B = 90°$, dus $BD^2 + BC^2 = CD^2$

$BD^2 + 15^2 = 25^2$

$BD^2 = 25^2 - 15^2 = 400$

$BD = \sqrt{400} = 20$

Stel $BS = x$, dan is $DS = 20 - x$.

AB	BS	geeft	10	x
CD	DS		25	$20 - x$

$25x = 10(20 - x)$

$25x = 200 - 10x$

$35x = 200$

$x = 5{,}71\ldots$

In $\triangle BCS$ is $\angle B = 90°$, dus $CS^2 = BC^2 + BS^2$

$CS^2 = 15^2 + 5{,}71\ldots^2 = 257{,}65\ldots$

$CS = \sqrt{257{,}65\ldots} \approx 16{,}1$

Bladzijde 71

34 Stel $AC = x$, dan is $CD = 19 - x$.
Stel $BC = y$, dan is $CE = 17 - y$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle E\ (= 90^\circ)\\ \angle C_1 = \angle C_2\ \text{(overstaande hoeken)}\end{array}\right\}\triangle ABC \backsim \triangle EDC\ \text{(hh)}$$

AB	BC	AC
ED	DC	EC

geeft

3	y	x
9	$19 - x$	$17 - y$

3	y
9	$19 - x$

geeft $9y = 3(19 - x)$
$3y = 19 - x$
$x = 19 - 3y$

3	x
9	$17 - y$

en $x = 19 - 3y$ geeft

3	$19 - 3y$
9	$17 - y$

$3(17 - y) = 9(19 - 3y)$
$51 - 3y = 171 - 27y$
$24y = 120$
$y = 5$

$y = 5$ geeft $x = 19 - 3 \cdot 5 = 4$
Dus $AC = 4$.

L5 **a**
$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle E_2\ \text{(F-hoeken)}\\ \angle A = \angle D_2\ \text{(F-hoeken)}\end{array}\right\}\triangle ABC \backsim \triangle DEC\ \text{(hh)}$$

b Stel $CE = x$, dan is $BC = x + 3$.

AB	BC
DE	EC

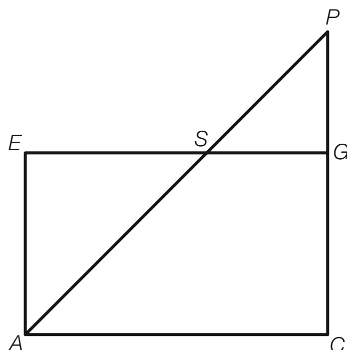
geeft

6	$x + 3$
4	x

$6x = 4(x + 3)$
$6x = 4x + 12$
$2x = 12$
$x = 6$

Dus $CE = 6$.

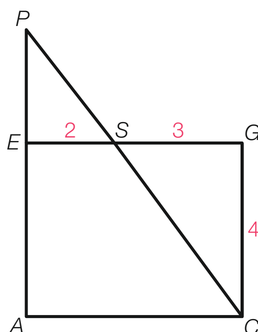
35 **a** Diagonaalvlak $ACGE$ is een rechthoek.



b $\triangle SGP \backsim \triangle ACP$ en $\triangle SGP \backsim \triangle SEA$.

Bladzijde 72

36 **a**, **b**



b In $\triangle EFG$ is $\angle F = 90°$, dus $EG^2 = EF^2 + FG^2$

$EG^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$EG = \sqrt{25} = 5$

$GS = GE - ES = 5 - 2 = 3$

c $\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle G\ (= 90°)\\ \angle P = \angle C \text{ (in } \triangle CGS\text{) (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle EPS \sim \triangle GCS \text{ (hh)}$

EP	ES
GC	GS

geeft

EP	2
4	3

$EP = \frac{4 \cdot 2}{3} = 2\frac{2}{3}$

Bladzijde 73

37 In $\triangle BCG$ is $\angle C = 90°$, dus $BG^2 = BC^2 + CG^2$

$BG^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$BG = \sqrt{100} = 10$

$GS = BG - BS = 10 - 4 = 6$

Zie de schets hiernaast.

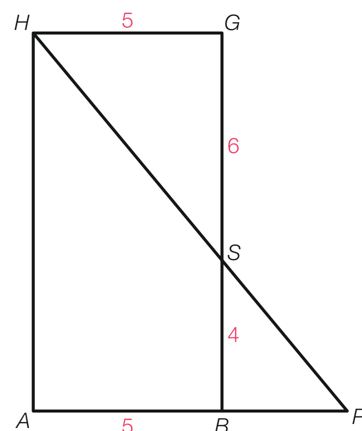
$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle G\ (= 90°)\\ \angle P = \angle H \text{ (in } \triangle GHS\text{) (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle BPS \sim \triangle GHS \text{ (hh)}$

BP	BS
GH	GS

geeft

BP	4
5	6

$BP = \frac{4 \cdot 5}{6} = 3\frac{1}{3}$



38 Zie de schets hiernaast.

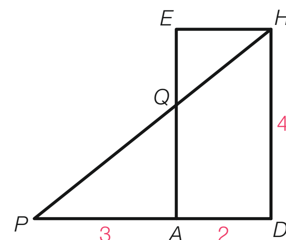
$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (= 90°)\\ \angle P \text{ (in } \triangle AQP\text{)} = \angle P \text{ (in } \triangle DHP\text{)}\end{array}\right\} \triangle APQ \sim \triangle DPH \text{ (hh)}$

AP	AQ
DP	DH

geeft

3	AQ
5	4

$AQ = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2\frac{2}{5}$



Zie de schets hiernaast.

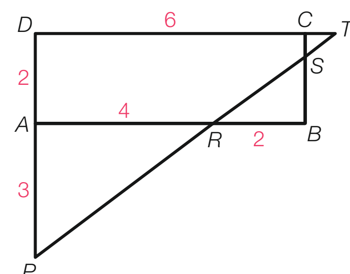
$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle B\ (= 90°)\\ \angle P = \angle S \text{ (in } \triangle BRS\text{) (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle APR \sim \triangle BSR \text{ (hh)}$

AP	AR
BS	BR

geeft

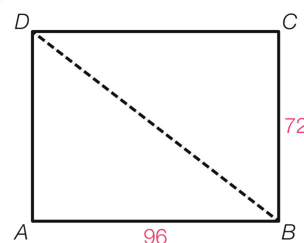
3	4
BS	2

$BS = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1\frac{1}{2}$

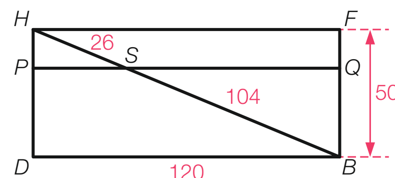


39 (lengte stok)$^2 = 96^2 + 72^2 + 50^2 = 16\,900$, dus lengte stok $= \sqrt{16\,900} = 130$ cm.
Het gedeelte van de stok dat zich in het water bevindt, is $130 - 26 = 104$ cm lang.
Zie hiernaast een schets van het grondvlak $ABCD$ van het aquarium.
In $\triangle ABD$ is $\angle A = 90°$, dus $BD^2 = AB^2 + BD^2$

$$BD^2 = 96^2 + 72^2 = 14\,400$$
$$BD = \sqrt{14\,400} = 120$$



Zie hiernaast een schets van het diagonaalvlak met daarin de stok.
Stel de hoogte van het water $DP = x$, dan is $HP = 50 - x$.



$\left.\begin{array}{l}\angle P = \angle Q\ (= 90°)\\ \angle H \text{ (in } \triangle HPS) = \angle B \text{ (in } \triangle BQS) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\ \triangle HPS \sim \triangle BQS$ (hh)

HP	HS
BQ	BS

geeft

$50 - x$	26
x	104

$$26x = 104(50 - x)$$
$$26x = 5200 - 104x$$
$$130x = 5200$$
$$x = 40$$

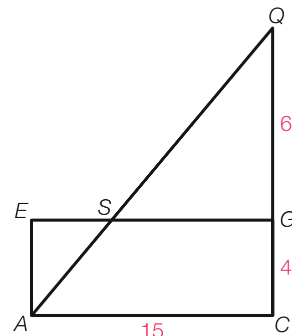
Dus de hoogte van het water is 40 cm.
Dus er zit $96 \cdot 72 \cdot 40 = 276\,480$ cm^3 = 276,48 dm^3 ≈ 276 liter water in het aquarium.

Alternatieve uitwerking
(lengte stok)$^2 = 96^2 + 72^2 + 50^2 = 16\,900$, dus lengte stok $= \sqrt{16\,900} = 130$ cm.
Het gedeelte van de stok dat zich in het water bevindt, is $130 - 26 = 104$ cm lang.
Dus er zit $\frac{104}{130} \cdot 50 \cdot 96 \cdot 72 = 276\,480$ cm^3 = 276,48 dm^3 ≈ 276 liter water in het aquarium.

L6 **a, b** Zie de schets hiernaast.

b In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90°$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$
$$AC = \sqrt{225} = 15$$



c $\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle G\ (= 90°)\\ \angle Q \text{ (in } \triangle ACQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle GQS)\end{array}\right\}\ \triangle ACQ \sim \triangle SGQ$ (hh)

AC	CQ
SG	GQ

geeft

15	10
GS	6

$$GS = \frac{6 \cdot 15}{10} = 9$$

2.3 Bewijzen met gelijkvormigheid

Bladzijde 74

40 $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\}\ \angle A + \angle C_2 + \angle B = 180°$

Bladzijde 75

41 **a** Daar waar in het bewijs Z-hoeken worden gebruikt, wordt gebruikgemaakt van de definitie van een parallellogram. Want voor Z-hoeken heb je evenwijdige lijnen nodig en volgens de definitie van een parallellogram geldt $AB \mathbin{//} CD$ en $AD \mathbin{//} BC$.

b $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle B_2 = \angle D_1 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\ \angle B_1 + \angle B_2 = \angle D_1 + \angle D_2$

$\angle B_{12} = \angle D_{12}$

c Uit vraag b volgt dat $\angle B_{12} = \angle D_{12}$ en uit de theorie volgt dat $\angle A_{12} = \angle C_{12}$.
Dus in een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot.

42 $\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle A_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle CDA \text{ (hh)}$

$\triangle ABC \sim \triangle CDA$ geeft $\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline CD & DA & CA \end{array}$

$AC = AC$, dus $AB = CD$ en $BC = DA$.
Dus in een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang.

Bladzijde 76

43 $\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle B_1 = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ (hh)}$

$\triangle ABS \sim \triangle CDS$ geeft $\begin{array}{c|c|c} AB & BS & AS \\ \hline CD & DS & CS \end{array}$

Uit opgave 42 volgt $AB = CD$, dus $BS = DS$ en $AS = CS$.
Dus in een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

Bladzijde 77

44 $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{10\frac{1}{2}}{7} = 1\frac{1}{2}$

$\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$

$\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{7\frac{1}{2}}{5} = 1\frac{1}{2}$

Dus $\triangle DEF$ is een vergroting van $\triangle ABC$, waarbij $k = 1\frac{1}{2}$.

Bladzijde 78

45 $\left.\begin{array}{l} AC : BC = 1 : 1 \\ AD : BD = 1 : 1 \\ CD \text{ (in } \triangle ADC) : CD \text{ (in } \triangle BDC) = 1 : 1 \end{array}\right\} \triangle ACD \sim \triangle BCD \text{ (zzz)}$

Uit $\triangle ACD \sim \triangle BCD$ volgt dat $\angle A = \angle B$, want van gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk.

46 **a** In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot (zie opgave 45), dus $\angle A = \angle B$ en $\angle B = \angle C$. Hieruit volgt dat $\angle A = \angle B = \angle C$.

b $\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle B = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot \angle C = 180^\circ \\ \angle C = 60^\circ \\ \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ \end{array}$

Dus in een gelijkzijdige driehoek zijn alle hoeken 60°.

Bladzijde 79

47 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A_{12} = \angle B_2 \text{ (basishoeken)} \\ \angle A_3 = \angle B_3 \text{ } (= 90^\circ) \end{array}\right\} \angle A_{123} = \angle B_{23}$

$\left.\begin{array}{l} BC = AC \text{ (gegeven)} \\ BC = BG \text{ (vierkant } BCFG) \end{array}\right\} AC = BG$

$\left.\begin{array}{l} \angle A_{123} = \angle B_{23} \\ AC : BG = 1 : 1 \\ AE : AB = 1 : 1 \text{ (vierkant } ABDE) \end{array}\right\} \triangle CAE \sim \triangle GBA \text{ (zhz)}$

b $\left.\begin{array}{l} \triangle CAE \sim \triangle GBA \text{, dus } \begin{array}{c|c} CE & AE \\ \hline GA & BA \end{array} \\ AE = AB \text{ (vierkant } ABDE) \end{array}\right\} CE = AG$

48 $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = \angle B_3 = 60° \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ \angle B_{12} = 60° + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60° + \angle B_2\end{array}\right\} \angle B_{12} = \angle B_{23}$
$AB : BC = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
$BE : BD = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek BDE)
$\} \triangle BAE \sim \triangle BCD$ (zhz)

$\triangle BAE \sim \triangle BCD$, dus $\begin{array}{c|c} BA & AE \\ \hline BC & CD \end{array}$
$AB = BC$ (gelijkzijdige driehoek ABC) $\} AE = CD$

49 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D \text{ (in } \triangle ACD) \;(= 90°) \\ \angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD)\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD$ (hh)

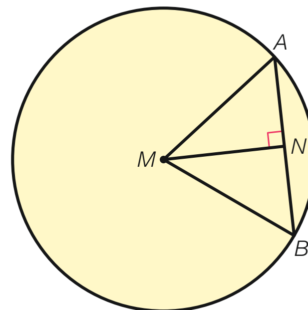
b $\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline AC & AD \end{array}$ geeft $AC^2 = AB \cdot AD$

c $\left.\begin{array}{l}\angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D \text{ (in } \triangle BCD) \;(= 90°) \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BCD)\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle CBD$ (hh)

$\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline CB & BD \end{array}$ geeft $BC^2 = AB \cdot BD$

d $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$, dus $AC^2 + BC^2 = AB^2$.
Hiermee is de stelling van Pythagoras bewezen.

L7 **a** Zie de figuur hiernaast.
AM en BM zijn beide straal van de cirkel, dus $AM = BM$.



b $\left.\begin{array}{l}AM : BM = 1 : 1 \text{ (straal cirkel)} \\ MN \text{ (in } \triangle AMN) : MN \text{ (in } \triangle BMN) = 1 : 1 \\ \angle N \text{ (in } \triangle AMN) = \angle N \text{ (in } \triangle BMN) = 90°\end{array}\right\} \triangle AMN \sim \triangle BMN$ (zzr)

c $\triangle AMN \sim \triangle BMN$, dus $\begin{array}{c|c} AN & MN \\ \hline BN & MN \end{array}$
$MN : MN = 1 : 1$ $\} AN : BN$
Uit $AN : BN$ volgt dat N het midden van AB is.

2.4 Middenparallel en zwaartelijn

Bladzijde 80

50 **a** P is het midden van AB, dus AP is de helft van AB, dus $AP : AB = 1 : 2$.

b $\left.\begin{array}{l}AP : AB = 1 : 2 \\ \angle A \text{ (in } \triangle APQ) = \angle A \text{ (in } \triangle ABC) \\ AQ : AC = 1 : 2\end{array}\right\} \triangle APQ \sim \triangle ABC$ (zhz)

c Uit $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ en $AP : AB = 1 : 2$ volgt $PQ : BC = 1 : 2$, dus $PQ = \frac{1}{2}BC$.

d Uit $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ volgt dat $\angle P_1 = \angle B$. Er is dus sprake van een paar even grote F-hoeken.
Uit de stelling boven opgave 50 volgt dat $PQ \,//\, BC$.

51 **a** $\angle T = \angle Q = 90°$ (F-hoeken)
$\angle S = \angle Q = 90°$ (F-hoeken)
$\angle U = 360° - 3 \cdot 90° = 90°$ (hoekensom vierhoek)
$SQTU$ heeft vier rechte hoeken, dus $SQTU$ is een rechthoek.

b $UT = QS = 3$
$\angle T = 90°$, dus $RT^2 + TU^2 = RU^2$
$RT^2 + 3^2 = 5^2$
$RT^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
$RT = \sqrt{16} = 4$
$QT = RT = 4$
opp. $SQTU = 3 \cdot 4 = 12$

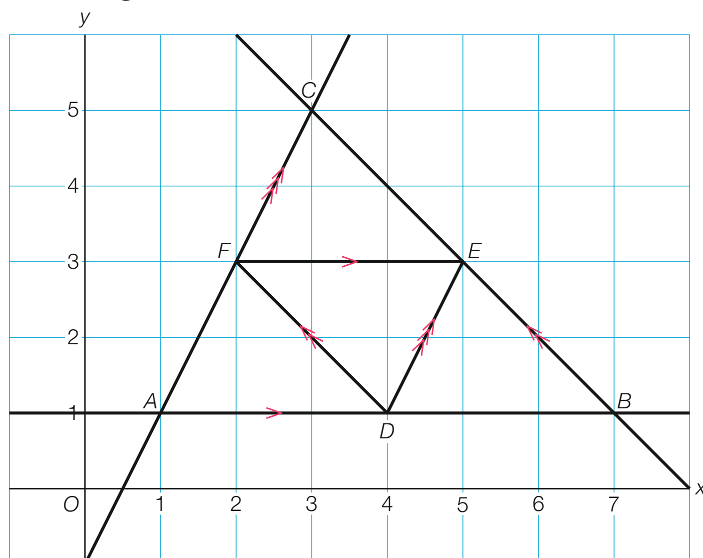
c omtrek $\triangle PQR = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 24$

Bladzijde 81

52 *Aanpak*

- Teken door D de lijn evenwijdig met EF.
- Teken door E de lijn evenwijdig met DF.
- Teken door F de lijn evenwijdig met DE.
- De snijpunten van deze lijnen zijn de hoekpunten A, B en C van $\triangle ABC$.

Uitwerking



53 **a** In $\triangle ACD$ is RS een middenparallel, dus $RS \mathbin{//} AC$
In $\triangle ABC$ is PQ een middenparallel, dus $PQ \mathbin{//} AC$ $\Big\}$ $PQ \mathbin{//} RS$

b In $\triangle ABD$ is PS een middenparallel, dus $PS \mathbin{//} BD$
In $\triangle BCD$ is QR een middenparallel, dus $QR \mathbin{//} BD$ $\Big\}$ $PS \mathbin{//} QR$

$\left.\begin{matrix} PQ \mathbin{//} RS \\ PS \mathbin{//} QR \end{matrix}\right\}$ $PQRS$ is een parallellogram.

L8 **a** $CD = BD = 3$, dus $BC = 2 \cdot 3 = 6$.

$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

$AC = 2DF = 2 \cdot 2 = 4$

$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Dus de omtrek van vierhoek $EFDC$ is $3 + 2 + 3 + 2 = 10$.

b $\angle A = \angle C$ (gegeven), dus $AB = BC = 6$.
Dus de omtrek van $\triangle ABC$ is $6 + 6 + 4 = 16$.

54 **a** PR verbindt de middens van de zijden AB en AC, dus PR is een middenparallel.

b PR is een middenparallel, dus $PR \mathbin{//} BC$. Hieruit volgt dat

$\left.\begin{matrix} \angle R_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle P_2 = \angle B_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{matrix}\right\}$ $\triangle PRZ \sim \triangle BCZ$ (hh)

c Uit $\triangle PRZ \sim \triangle BCZ$ volgt

PR	RZ	PZ
BC	CZ	BZ

$\frac{PR}{BC} = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\frac{PZ}{BZ} = \frac{1}{2}$ en $\frac{RZ}{CZ} = \frac{1}{2}$

Bladzijde 83

55 **a** In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90°$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$10^2 + BC^2 = 12{,}5^2$$
$$BC^2 = 12{,}5^2 - 10^2 = 56{,}25$$
$$BC = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$$

CP is zwaartelijn, dus $BP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

In $\triangle BCP$ is $\angle B = 90°$, dus $CP^2 = BC^2 + BP^2$

$$CP^2 = 56{,}25 + 5^2 = 81{,}25$$
$$CP = \sqrt{81{,}25} \approx 9{,}01$$

Z is het zwaartepunt, dus $CZ = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3} \cdot 9{,}013\ldots \approx 6{,}01$.

b AQ is zwaartelijn, dus $BQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 = 3{,}75$.

In $\triangle ABQ$ is $\angle B = 90°$, dus $AQ^2 = AB^2 + BQ^2$

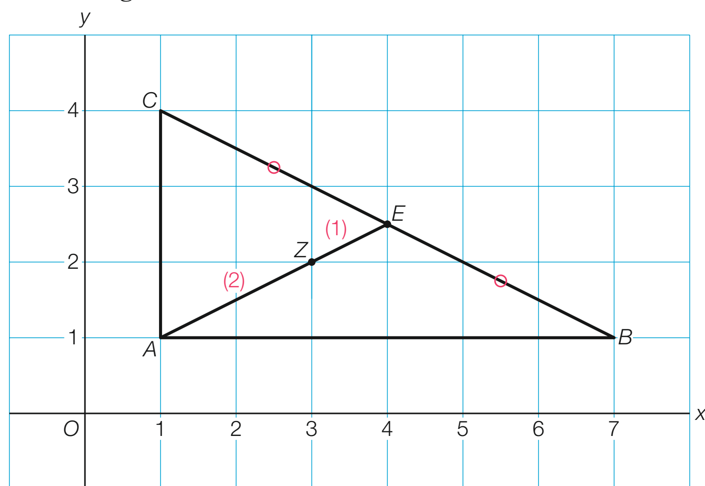
$$AQ^2 = 10^2 + 3{,}75^2 = 114{,}0625$$
$$AQ = \sqrt{114{,}0625} = 10{,}680\ldots$$

Z is het zwaartepunt, dus $QZ = \frac{1}{3}AQ = \frac{1}{3} \cdot 10{,}680\ldots \approx 3{,}56$.

56 *Aanpak*

- Ga uit van punt E als midden van BC.
- Z is zwaartepunt, dus er moet gelden $AZ : EZ = 2 : 1$. Van A naar Z is 2 naar rechts en 1 omhoog, dus van Z naar E is 1 naar rechts en 0,5 omhoog, dus $E(4;\ 2{,}5)$.
- E is het midden van BC. Van B naar E is 3 naar links en 1,5 omhoog, dus van E naar C is ook 3 naar links en 1,5 omhoog, dus $C(1, 4)$.

Uitwerking



$C(1, 4)$

57 CQ is zwaartelijn, dus $BQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

In $\triangle BCQ$ is $\angle Q = 90°$, dus $BQ^2 + CQ^2 = BC^2$

$$4^2 + CQ^2 = 5^2$$
$$CQ^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$
$$CQ = \sqrt{9} = 3$$

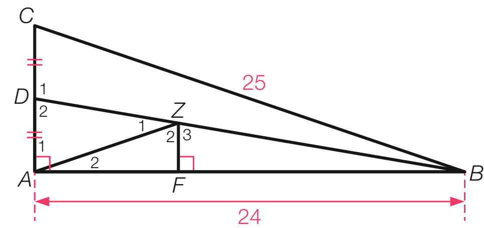
Z is het zwaartepunt, dus $QZ = \frac{1}{3}CQ = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

In $\triangle BQZ$ is $\angle Q = 90°$, dus $BZ^2 = BQ^2 + QZ^2$

$$BZ^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$
$$BZ = \sqrt{17} = 4{,}12\ldots$$

Z is het zwaartepunt, dus $BZ = \frac{2}{3}BP$ oftewel $BP = \frac{3}{2}BZ = \frac{3}{2} \cdot 4{,}12\ldots \approx 6{,}2$.

58 Zie de schets hiernaast met $\triangle ABC$, zwaartelijn BD en zwaartepunt Z.



In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$24^2 + AC^2 = 25^2$$
$$AC^2 = 25^2 - 24^2 = 49$$
$$AC = \sqrt{49} = 7$$

BD is zwaartelijn, dus $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle A_{12} = \angle F \ (= 90°) \\ \angle D_2 = \angle Z_3 \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABD \backsim \triangle FBZ$ (hh)

$\triangle ABD \backsim \triangle FBZ$, dus $\begin{array}{c|c} AD & BD \\ \hline FZ & BZ \end{array}$

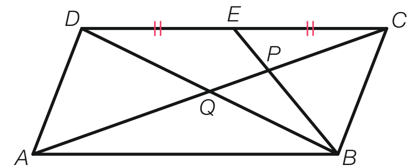
Z is het zwaartepunt, dus $BZ = \frac{2}{3}BD$

$AD = 3\frac{1}{2}$

$\Big\}$ $FZ = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}$

Dus opp. $\triangle ABZ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2\frac{1}{3} = 28$.

59 **a** Zie de schets hiernaast.

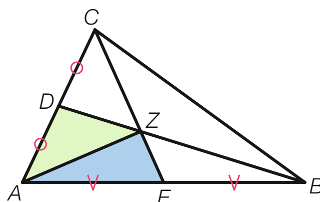


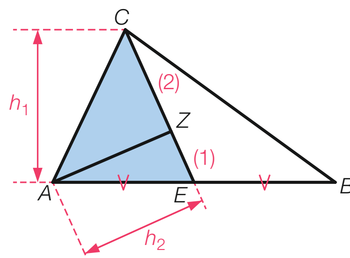
E is het midden van CD, dus BE is zwaartelijn van $\triangle BCD$.
In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor, dus Q is het midden van BD, dus CQ is zwaartelijn van $\triangle BCD$.
BE en CQ snijden elkaar in P, dus P is het zwaartepunt van $\triangle BCD$.

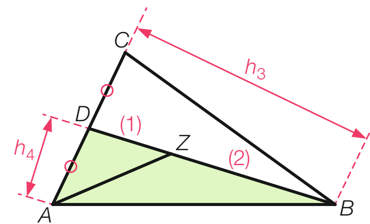
b In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor, dus $CQ = \frac{1}{2}AC$.
P is het zwaartepunt van $\triangle BCD$, dus $CP = \frac{2}{3}CQ$.
Uit bovenstaande volgt $CP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ en $AP = \frac{2}{3}AC$.
Dus $CP : AP = 1 : 2$.
$AP = 8$, dus $CP = 8 : 2 = 4$.

60 *Aanpak*
Splits vierhoek $AEZD$ in twee driehoeken zoals in linkerfiguur hieronder, en toon aan dat opp. $\triangle ADZ = \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC$ en opp. $\triangle AEZ = \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC$.

Uitwerking
Zie de middelste figuur hieronder.
CE is zwaartelijn, dus $AE = BE$ en opp. $\triangle ACE =$ opp. $\triangle BCE = \frac{1}{2} \cdot$ opp. $\triangle ABC$, want zowel bij zijde AE als bij zijde BE hoort hoogte h_1.
Z is het zwaartepunt, dus $EZ = \frac{1}{3}CE$ en hieruit volgt dat opp. $\triangle AEZ = \frac{1}{3} \cdot$ opp. $\triangle ACE$, want zowel bij zijde CE als bij zijde EZ hoort hoogte h_2.
Hieruit volgt dat opp. $\triangle AEZ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot$ opp. $\triangle ABC = \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC$.







Zie de rechterfiguur hierboven.
BD is zwaartelijn, dus $AD = CD$ en opp. $\triangle ABD =$ opp. $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot$ opp. $\triangle ABC$, want zowel bij zijde AD als bij zijde CD hoort hoogte h_3.
Z is het zwaartepunt, dus $DZ = \frac{1}{3}BD$ en hieruit volgt dat opp. $\triangle ADZ = \frac{1}{3} \cdot$ opp. $\triangle ABD$, want zowel bij zijde BD als bij zijde DZ hoort hoogte h_4.
Hieruit volgt dat opp. $\triangle ADZ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot$ opp. $\triangle ABC = \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC$.
Dus opp. $\triangle ADZ +$ opp. $\triangle AEZ = \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC + \frac{1}{6} \cdot$ opp. $\triangle ABC = \frac{1}{3} \cdot$ opp. $\triangle ABC$.

L9 **a** PS is zwaartelijn, dus $QS = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

In $\triangle PQS$ is $\angle Q = 90°$, dus $PS^2 = PQ^2 + QS^2$

$PS^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$PS = \sqrt{169} = 13$

Z is het zwaartepunt, dus $SZ = \frac{1}{3}PS = \frac{1}{3} \cdot 13 = 4\frac{1}{3}$.

b RT is zwaartelijn, dus $QT = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

In $\triangle QRT$ is $\angle Q = 90°$, dus $RT^2 = QR^2 + QT^2$

$RT^2 = 10^2 + 6^2 = 136$

$RT = \sqrt{136} = 11{,}661...$

Z is het zwaartepunt, dus $RZ = \frac{2}{3}RT = \frac{2}{3} \cdot 11{,}661... \approx 7{,}8$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 84

1 **a** $6(x + 5) = 8$

$6x + 30 = 8$

$6x = -22$

$x = -3\frac{2}{3}$

b $\begin{array}{c|c} y-3 & 2y+1 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$ geeft $3(y - 3) = 5(2y + 1)$

$3y - 9 = 10y + 5$

$-7y = 14$

$y = -2$

$\begin{array}{c|c} 4 & -2-3 \\ \hline x & 5 \end{array}$ geeft $x = \frac{4 \cdot 5}{-5} = -4$

c $(x + 7)(x - 1) = (x - 3)(x + 3)$

$x^2 - x + 7x - 7 = x^2 + 3x - 3x - 9$

$x^2 + 6x - 7 = x^2 - 9$

$6x = -2$

$x = -\frac{1}{3}$

2 $\left.\begin{array}{l} \angle D \text{ (in } \triangle DEF) = \angle A \text{ (F-hoeken)} \\ \angle E \text{ (in } \triangle DEF) = \angle E \text{ (in } \triangle AEG) \end{array}\right\} \triangle DEF \sim \triangle AEG \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} DE & DF \\ \hline AE & AG \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 6 & DF \\ \hline 10{,}8 & 8{,}4 \end{array}$

$DF = \frac{6 \cdot 8{,}4}{10{,}8} \approx 4{,}67$

$\left.\begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BGH) = \angle A \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle H \text{ (in } \triangle BGH) = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle BGH \sim \triangle AGE \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} BG & BH \\ \hline AG & AE \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 3{,}2 & BH \\ \hline 8{,}4 & 10{,}8 \end{array}$

$BH = \frac{3{,}2 \cdot 10{,}8}{8{,}4} \approx 4{,}11$

3 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle F \text{ (in } \triangle BCF) = \angle A \text{ (F-hoeken)} \\ \angle B \text{ (in } \triangle BCF) = \angle B \text{ (in } \triangle ABE) \end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle BEA \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} BF & CF \\ \hline BA & AE \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 8 & 6-2 \\ \hline BA & 6 \end{array}$

$AB = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$, dus $AF = 12 - 8 = 4$.

b $\triangle BCF \sim \triangle BEA$ geeft $\begin{array}{c|c} BC & CF \\ \hline BE & EA \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c} BC & 6-2 \\ \hline 15 & 6 \end{array}$, dus $BC = \frac{4 \cdot 15}{6} = 10$.

4 $\left.\begin{array}{l}\angle F \text{ (in } \triangle BCF) = \angle A \text{ (F-hoeken)} \\ \angle B \text{ (in } \triangle BCF) = \angle B \text{ (in } \triangle ABE)\end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle BEA \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c|c} BC & CF & BF \\ \hline BE & EA & BA \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c|c} BC & 6-2 & 8 \\ \hline 15 & 6 & BA \end{array}$

$AB = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$, dus $DE = AF = 12 - 8 = 4$.

$BC = \frac{4 \cdot 15}{6} = 10$

De omtrek van vijfhoek $ABCDE$ is $12 + 10 + 2 + 4 + 6 = 34$.

5 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 \text{ (in } \triangle BCF) = \angle B_1 \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle F = \angle D \text{ } (= 90°)\end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle BED \text{ (hh)}$

In $\triangle BDE$ is $\angle D = 90°$, dus $BE^2 = BD^2 + DE^2$

$BE^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$BE = \sqrt{169} = 13$

$\triangle BCF \sim \triangle BED$ geeft $\begin{array}{c|c|c} BC & CF & BF \\ \hline BE & ED & BD \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c|c} 6 & CF & BF \\ \hline 13 & 5 & 12 \end{array}$.

$BF = \frac{6 \cdot 12}{13} = 5{,}53\ldots$, dus $EF = 13 - 5{,}53\ldots \approx 7{,}5$.

b $\left.\begin{array}{l}\angle C_2 \text{ (in } \triangle BCF) = \angle C_2 \text{ (in } \triangle ABC) \\ \angle F = \angle B_{12} \text{ } (= 90°)\end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle ACB \text{ (hh)}$

Uit $\triangle BCF \sim \triangle ACB$ en $\triangle BCF \sim \triangle BED$ volgt $\triangle ACB \sim \triangle BED$.

$\begin{array}{c|c} AB & CB \\ \hline BD & ED \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} AB & 6 \\ \hline 12 & 5 \end{array}$

$AB = \frac{6 \cdot 12}{5} = 14{,}4$

6 $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 \text{ (in } \triangle BCF) = \angle B_1 \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle F = \angle E \text{ } (= 90°)\end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle BED \text{ (hh)}$

$\left.\begin{array}{l}\angle C_2 \text{ (in } \triangle BCF) = \angle C_2 \text{ (in } \triangle ABC) \\ \angle F = \angle B_{12} \text{ } (= 90°)\end{array}\right\} \triangle BCF \sim \triangle ACB \text{ (hh)}$

Uit $\triangle BCF \sim \triangle ACB$ en $\triangle BCF \sim \triangle BED$ volgt $\triangle ACB \sim \triangle BED$.

$\begin{array}{c|c} AB & CB \\ \hline BD & ED \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} AB & 6 \\ \hline 12 & 5 \end{array}$

$AB = \frac{6 \cdot 12}{5} = 14{,}4$

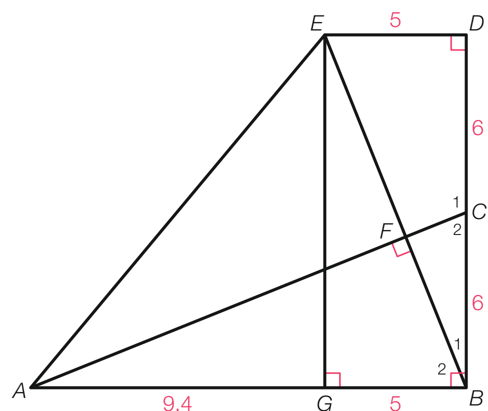
Zie de schets hiernaast met de hulplijnen AE en EG.

In $\triangle AEG$ is $\angle G = 90°$, dus $AE^2 = AG^2 + EG^2$

$AE^2 = 9{,}4^2 + 12^2 = 232{,}36$

$AE = \sqrt{232{,}36} \approx 15{,}2$

Dus de afstand tussen A en E is ongeveer 15,2.



7 Zie de schetsen hiernaast.

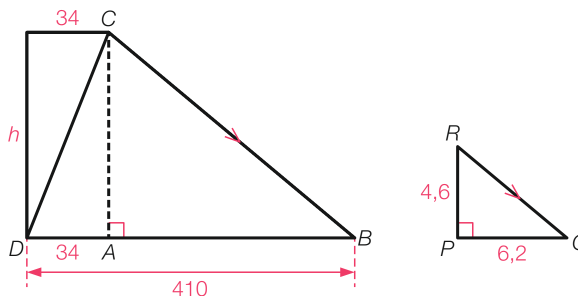
$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle P \; (= 90°) \\ \angle B = \angle Q \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle PQR \text{ (hh)}$

$AB = 410 - 34 = 376$

$\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline PQ & PR \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 376 & AC \\ \hline 6{,}2 & 4{,}6 \end{array}$

$AC = \dfrac{4{,}6 \cdot 376}{6{,}2} \approx 279$

Dus de hoogte h van de rots is ongeveer 279 meter.



Bladzijde 85

8 **a** Zie de schets hiernaast.

$\angle A_2 = 180° - 90° - \angle A_1 = 90° - \angle A_1$ (gestrekte hoek)

$\angle D_1 = 180° - 90° - \angle A_1 = 90° - \angle A_1$ (hoekensom driehoek)

Dus $\angle A_2 = \angle D_1$.

$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle D_1 \\ \angle E = \angle F \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABE \sim \triangle DAF \text{ (hh)}$

In $\triangle ABE$ is $\angle E = 90°$, dus $AE^2 + BE^2 = AB^2$

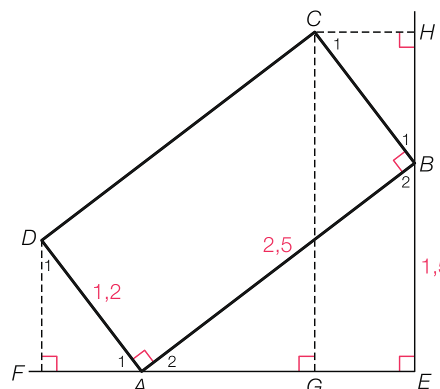
$AE^2 + 1{,}5^2 = 2{,}5^2$

$AE^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 4$

$AE = \sqrt{4} = 2$

$\begin{array}{c|c} AB & AE \\ \hline DA & DF \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 2{,}5 & 2 \\ \hline 1{,}2 & DF \end{array}$

$DF = \dfrac{1{,}2 \cdot 2}{2{,}5} = 0{,}96$ meter



b $\angle B_2 = 180° - 90° - \angle B_1 = 90° - \angle B_1$ (gestrekte hoek)

$\angle C_1 = 180° - 90° - \angle B_1 = 90° - \angle B_1$ (hoekensom driehoek)

Dus $\angle B_2 = \angle C_1$.

$\left.\begin{array}{l}\angle B_2 = \angle C_1 \\ \angle E = \angle H \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABE \sim \triangle BCH \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} AB & AE \\ \hline BC & BH \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 2{,}5 & 2 \\ \hline 1{,}2 & BH \end{array}$

$BH = \dfrac{2 \cdot 1{,}2}{2{,}5} = 0{,}96$

Dus $CG = BE + BH = 1{,}5 + 0{,}96 = 2{,}46$ meter.

9 **a** Zie de schets hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H \; (= 90°) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DMP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPQ)\end{array}\right\} \triangle DMP \sim \triangle HQP \text{ (hh)}$

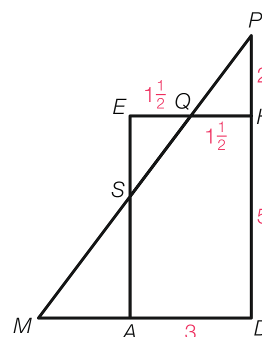
$\begin{array}{c|c} DM & DP \\ \hline HQ & HP \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} DM & 7 \\ \hline 1\frac{1}{2} & 2 \end{array}$

$DM = \dfrac{7 \cdot 1\frac{1}{2}}{2} = 5\frac{1}{4}$

$\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle H \; (= 90°) \\ \angle S \text{ (in } \triangle EQS) = \angle P \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle EQS \sim \triangle HQP \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} EQ & ES \\ \hline HQ & HP \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 1\frac{1}{2} & ES \\ \hline 1\frac{1}{2} & 2 \end{array}$

$ES = 2$



b Zie de schets hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90°) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DNP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPR)\end{array}\right\}\ \triangle DNP \sim \triangle HRP$ (hh)

DP	NP	geeft	7	NP
HP	RP		2	$3\frac{1}{3}$

$NP = \dfrac{7 \cdot 3\frac{1}{3}}{2} = 11\frac{2}{3}$

In $\triangle EFH$ is $\angle E = 90°$, dus $FH^2 = EF^2 + EH^2$

$FH^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$FH = \sqrt{25} = 5$

In $\triangle HRP$ is $\angle H = 90°$, dus $HR^2 + HP^2 = PR^2$

$HR^2 + 2^2 = (3\frac{1}{3})^2$

$HR^2 = (3\frac{1}{3})^2 - 2^2 = 7\frac{1}{9}$

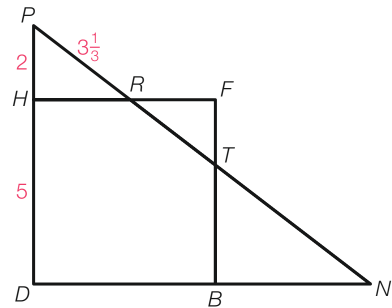
$HR = \sqrt{7\frac{1}{9}} = 2\frac{2}{3}$

$FR = 5 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l}\angle H = \angle F\ (= 90°) \\ \angle R \text{ (in } \triangle HPR) = \angle R \text{ (in } \triangle FRT)\end{array}\right\}\ \triangle HPR \sim \triangle FTR$ (hh)

HR	PR	geeft	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$
FR	TR		$2\frac{1}{3}$	TR

$RT = \dfrac{2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = 2\frac{11}{12}$



10 In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$AC^2 = 6^2 + 14{,}4^2 = 243{,}36$

$AC = \sqrt{243{,}36} = 15{,}6$

In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$BC^2 = 19{,}2^2 + 14{,}4^2 = 576$

$BC = \sqrt{576} = 24$

In $\triangle KLN$ is $\angle N = 90°$, dus $KN^2 + LN^2 = KL^2$

$KN^2 + 3^2 = 7{,}8^2$

$KN^2 = 7{,}8^2 - 3^2 = 51{,}84$

In $\triangle KMN$ is $\angle N = 90°$, dus $KN^2 + MN^2 = KM^2$

$51{,}84 + MN^2 = 12^2$

$MN^2 = 12^2 - 51{,}84 = 92{,}16$

$MN = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AC}{KL} = \dfrac{15{,}6}{7{,}8} = 2 \\ \dfrac{AB}{LM} = \dfrac{6 + 19{,}2}{3 + 9{,}6} = 2 \\ \dfrac{BC}{KM} = \dfrac{24}{12} = 2\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle KLM \text{ (zzz)}$$

11 MN is een middenparallel, dus $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$.

In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$12^2 + AC^2 = 20^2$

$AC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$

$AC = \sqrt{256} = 16$

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

In $\triangle ACM$ is $\angle A = 90°$, dus $CM^2 = AM^2 + AC^2$

$CM^2 = 6^2 + 256 = 292$

$CM = \sqrt{292}$

Z is het zwaartepunt, dus $MZ = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}\sqrt{292}$.

$AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

In $\triangle ABN$ is $\angle A = 90°$, dus $BN^2 = AB^2 + AN^2$

$BN^2 = 12^2 + 8^2 = 208$

$BN = \sqrt{208}$

Z is het zwaartepunt, dus $NZ = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}\sqrt{208}$.

De omtrek van $\triangle MNZ$ is $10 + \frac{1}{3}\sqrt{292} + \frac{1}{3}\sqrt{208} \approx 20{,}5$.

12 opp. $\triangle MNZ$ = opp. $\triangle ABN$ − opp. $\triangle AMN$ − opp. $\triangle BMZ$

In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$12^2 + AC^2 = 20^2$

$AC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$

$AC = \sqrt{256} = 16$

$AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

opp. $\triangle ABN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ en

opp. $\triangle AMN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Zie de schets hiernaast.

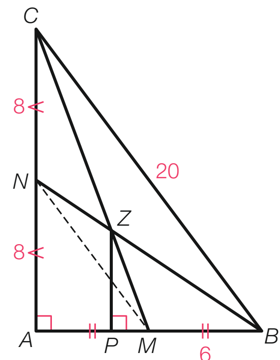
$\left.\begin{array}{l}\angle P = \angle A\ (= 90°)\\ \angle B \text{ (in } \triangle BPZ) = \angle B \text{ (in } \triangle ABN)\end{array}\right\}\ \triangle BPZ \sim \triangle BAN$ (hh)

Z is het zwaartepunt, dus $BZ = \frac{2}{3}BN$.

Uit $\triangle BPZ \sim \triangle BAN$ en $BZ = \frac{2}{3}BN$ volgt $PZ = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot 8 = 5\frac{1}{3}$.

opp. $\triangle BMZ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5\frac{1}{3} = 16$

Dus opp. $\triangle MNZ = 48 - 24 - 16 = 8$.



Diagnostische toets

Bladzijde 88

1 **a**

7	11
2	x

geeft $x = \frac{2 \cdot 11}{7} = 3\frac{1}{7}$

7	3
2	y

geeft $y = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$

b $5(2x + 3) = 4(x - 1)$

$10x + 15 = 4x - 4$

$6x = -19$

$x = -3\frac{1}{6}$

c $3y = 4 - y$

$4y = 4$

$y = 1$

2 $\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle D\ (= 90°)\\ \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE)\end{array}\right\}\ \triangle ABC \sim \triangle EBD$ (hh)

In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90°$, dus $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$AB = \sqrt{100} = 10$

AB	BC	AC
EB	BD	ED

geeft

10	8	6
6,5	BD	ED

$DE = \frac{6{,}5 \cdot 6}{10} = 3{,}9$ en $BD = \frac{6{,}5 \cdot 8}{10} = 5{,}2$.

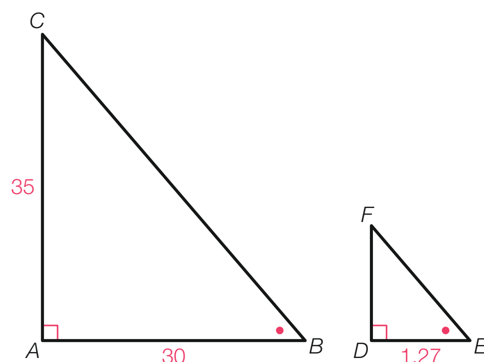
3 Zie de schets hiernaast.
$DE = 127$ cm $= 1{,}27$ m en de lengte van Coen is DF.

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (= 90°)\\ \angle B = \angle E\ \text{(gegeven)}\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (hh)

AB	BC	AC		30	BC	35
DE	EF	DF	geeft	$1{,}27$	EF	DF

$DF = \frac{1{,}27 \cdot 35}{30} \approx 1{,}48$

Dus de lengte van Coen is 148 cm.



4 $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (\text{in } \triangle DPQ)\ \text{(F-hoeken)}\\ \angle P\ (\text{in } \triangle ABP) = \angle P\ (\text{in } \triangle DPQ)\end{array}\right\}\triangle ABP \sim \triangle DQP$ (hh)

AB	BP	AP		6	BP	$5{,}5$
DQ	QP	DP	geeft	DQ	QP	$1{,}5$

$DQ = \frac{6 \cdot 1{,}5}{5{,}5} \approx 1{,}6$

Bladzijde 89

5 $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (\text{in } \triangle BDE)\ \text{(F-hoeken)}\\ \angle B\ (\text{in } \triangle ABC) = \angle B\ (\text{in } \triangle BDE)\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (hh)

Stel $BE = x$, dan is $BC = x + 4{,}8$.

AB	BC	AC		AB	$x + 4{,}8$	$5{,}4$
DB	BE	DE	geeft	$2{,}6$	x	$1{,}8$

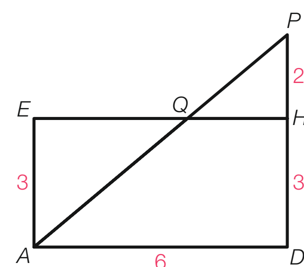
$5{,}4x = 1{,}8(x + 4{,}8)$
$5{,}4x = 1{,}8x + 8{,}64$
$3{,}6x = 8{,}64$
$x = 2{,}4$, dus $BE = 2{,}4$.
$AB = \frac{2{,}6 \cdot 5{,}4}{1{,}8} = 7{,}8$ en $AD = AB - BD = 7{,}8 - 2{,}6 = 5{,}2$.

6 **a** Zie de schets hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90°)\\ \angle P\ (\text{in } \triangle ADP) = \angle P\ (\text{in } \triangle HPQ)\end{array}\right\}\triangle ADP \sim \triangle QHP$ (hh)

AD	DP		6	5
QH	HP	geeft	QH	2

$HQ = \frac{6 \cdot 2}{5} = 2\frac{2}{5}$

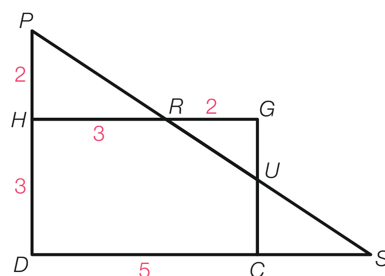


b Zie de schets hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle H = \angle G\ (= 90°)\\ \angle P = \angle U\ (\text{in } \triangle GRU)\ \text{(Z-hoeken)}\end{array}\right\}\triangle HPR \sim \triangle GUR$ (hh)

HP	HR		2	3
GU	GR	geeft	GU	2

$GU = \frac{2 \cdot 2}{3} = 1\frac{1}{3}$



c $\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90°)\\ \angle P\ (\text{in } \triangle DPS) = \angle P\ (\text{in } \triangle HPR)\end{array}\right\}\triangle DPS \sim \triangle HPR$ (hh)

DP	DS		5	DS
HP	HR	geeft	2	3

$DS = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7\frac{1}{2}$

In $\triangle ADS$ is $\angle D = 90°$, dus $AS^2 = AD^2 + DS^2$

$AS^2 = 6^2 + (7\frac{1}{2})^2 = 92\frac{1}{4}$

$AS = \sqrt{92\frac{1}{4}} \approx 9{,}6$

7 **a** $\angle C_1 = \angle C_2 = 60°$ (gelijkzijdige driehoek)
$BC : AC = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
$CE : CD = 1 : 1$ (gelijkzijdige driehoek CDE)
$\Big\}\ \triangle BCE \sim \triangle ACD$ (zhz)

b $\triangle BCE \sim \triangle ACD$, dus

BC	BE
AC	AD

$BC = AC$ (gelijkzijdige driehoek ABC)
$\Big\}\ BE = AD$

8 **a** KM is een middenparallel van $\triangle PQR$, dus $KM = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4{,}2 = 4{,}2$.
b $KQ = KP = 5{,}6$
In $\triangle KMQ$ is $\angle K = 90°$, dus $MQ^2 = KM^2 + KQ^2$
$MQ^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 49$
$MQ = \sqrt{49} = 7$
Z is het zwaartepunt, dus $QZ = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3} \cdot 7 = 4\frac{2}{3}$.
c $LQ = LR = 4{,}2$ en $PQ = 2 \cdot 5{,}6 = 11{,}2$.
In $\triangle LPQ$ is $\angle Q = 90°$, dus $LP^2 = LQ^2 + PQ^2$
$LP^2 = 4{,}2^2 + 11{,}2^2 = 143{,}08$
$LP = \sqrt{143{,}08} = 11{,}961\ldots$
Z is het zwaartepunt, dus $LZ = \frac{1}{3}LP = \frac{1}{3} \cdot 11{,}961\ldots \approx 4{,}0$.

Herhaling

Bladzijde 90

1 **a** $x = \frac{9 \cdot 5}{7} = 6\frac{3}{7}$

b $x = \frac{5 \cdot 9}{13} = 3\frac{6}{13}$

c

3	11
x	17

geeft $x = \frac{3 \cdot 17}{11} = 4\frac{7}{11}$

11	5
17	y

geeft $y = \frac{17 \cdot 5}{11} = 7\frac{8}{11}$

2 **a** $7(3x - 2) = 4(x + 4)$
$21x - 14 = 4x + 16$
$17x = 30$
$x = 1\frac{13}{17}$

b

3	$x + 5$
11	$7x - 5$

geeft $3(7x - 5) = 11(x + 5)$
$21x - 15 = 11x + 55$
$10x = 70$
$x = 7$

3	7
11	y

geeft $y = \frac{11 \cdot 7}{3} = 25\frac{2}{3}$

3 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle D\ (= 90°)\\ \angle C\ (\text{in } \triangle ABC) = \angle C\ (\text{in } \triangle CDE)\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle EDC$ (hh)

b

AB	BC	AC
ED	DC	EC

c In $\triangle ABC$ is $\angle A = 90°$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$AC = \sqrt{169} = 13$

d

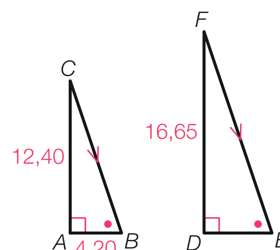
AB	BC	AC
ED	DC	EC

geeft

5	12	13
ED	DC	5

$DE = \frac{5 \cdot 5}{13} \approx 1{,}9$ en $CD = \frac{12 \cdot 5}{13} \approx 4{,}6$.

4 **a** Zie de schets hiernaast.



$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle E \text{ (gegeven)}\\ \angle A = \angle D\ (= 90°)\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (hh)

AB	AC
DE	DF

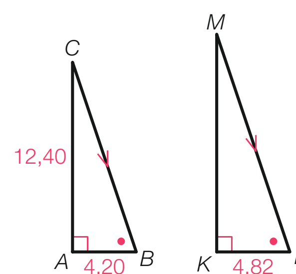
geeft

4,20	12,40
DE	16,65

$DE = \frac{4{,}20 \cdot 16{,}65}{12{,}40} \approx 5{,}64$

Dus de lengte van de schaduw van mast II is 564 cm.

b Zie de schets hiernaast.



$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle L \text{ (gegeven)}\\ \angle A = \angle K\ (= 90°)\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle KLM$ (hh)

AB	AC
KL	KM

geeft

4,20	12,40
4,82	KM

$KM = \frac{4{,}82 \cdot 12{,}40}{4{,}20} \approx 14{,}23$

Dus mast III is 14,23 meter hoog.

Bladzijde 91

5 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D_1 \text{ (F-hoeken)}\\ \angle B = \angle E_1 \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\}\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (hh)

b

AB	AC
DE	DC

geeft

12	10
DE	3

$DE = \frac{12 \cdot 3}{10} = 3{,}6$

6 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle P = \angle T \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle R = \angle S \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\triangle PQR \sim \triangle TQS$ (hh)

b Uit $\triangle PQR \sim \triangle TQS$ volgt

PR	QR
TS	QS

en dit geeft

5	6
TS	4

.

$ST = \frac{5 \cdot 4}{6} = 3\frac{1}{3}$

7 $4{,}5x = 3{,}2(x + 2{,}5)$

$4{,}5x = 3{,}2x + 8$

$1{,}3x = 8$

$x \approx 6{,}2$

Dus $CD \approx 6{,}2$.

8 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ADQ) = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\ \triangle ADQ \sim \triangle PCQ \text{ (hh)}$

$DQ = CD - CQ = 5{,}2 - 2{,}9 = 2{,}3$

$\begin{array}{c|c} AD & DQ \\ \hline PC & CQ \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 1{,}8 & 2{,}3 \\ \hline PC & 2{,}9 \end{array}$

$CP = \dfrac{1{,}8 \cdot 2{,}9}{2{,}3} \approx 2{,}3$

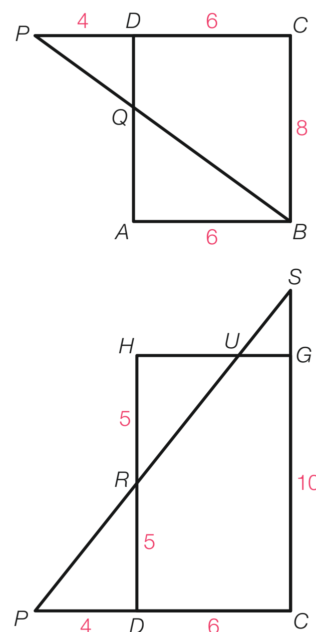
b $\left.\begin{array}{l}\angle P \text{ (in } \triangle ABP) = \angle P \text{ (in } \triangle CPQ) \\ \angle B = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\}\ \triangle ABP \sim \triangle QCP \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} AB & AP \\ \hline QC & QP \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 5{,}2 & 8{,}1 \\ \hline 2{,}9 & QP \end{array}$

$PQ = \dfrac{8{,}1 \cdot 2{,}9}{5{,}2} \approx 4{,}5$

Bladzijde 92

9 **a** Zie de schets hiernaast.



b $\left.\begin{array}{l}\angle P \text{ (in } \triangle DPQ) = \angle P \text{ (in } \triangle BCP) \\ \angle D = \angle C \text{ } (= 90°)\end{array}\right\}\ \triangle PQD \sim \triangle PBC \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} PD & QD \\ \hline PC & BC \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 4 & QD \\ \hline 10 & 8 \end{array}$

$DQ = \dfrac{4 \cdot 8}{10} = 3\tfrac{1}{5}$

c Zie de schets hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle U \text{ (in } \triangle RUH) = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle H = \angle D \text{ } (= 90°)\end{array}\right\}\ \triangle UHR \sim \triangle PDR \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} UH & HR \\ \hline PD & DR \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} UH & 5 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$, dus $HU = 4$.

d $\left.\begin{array}{l}\angle P \text{ (in } \triangle DPR) = \angle P \text{ (in } \triangle CPS) \\ \angle D = \angle C \text{ } (= 90°)\end{array}\right\}\ \triangle DPR \sim \triangle CPS \text{ (hh)}$

$\begin{array}{c|c} DP & DR \\ \hline CP & CS \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline 10 & CS \end{array}$

$CS = \dfrac{10 \cdot 5}{4} = 12\tfrac{1}{2}$ en $GS = CS - CG = 12\tfrac{1}{2} - 10 = 2\tfrac{1}{2}$.

In $\triangle BCS$ is $\angle C = 90°$, dus $BS^2 = BC^2 + CS^2$

$BS^2 = 8^2 + (12\tfrac{1}{2})^2 = 220\tfrac{1}{4}$

$BS = \sqrt{220\tfrac{1}{4}} \approx 14{,}84$

10 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = 60° - \angle C_2 \text{ (gelijkzijdige driehoek } ABC) \\ \angle C_3 = 60° - \angle C_2 \text{ (gelijkzijdige driehoek } CDE)\end{array}\right\}\ \angle C_1 = \angle C_3$

$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_3 \\ AC : BC = 1 : 1 \text{ (gelijkzijdige driehoek } ABC) \\ CD : CE = 1 : 1 \text{ (gelijkzijdige driehoek } CDE)\end{array}\right\}\ \triangle ACD \sim \triangle BCE \text{ (zhz)}$

b $\left.\begin{array}{l}\triangle ACD \sim \triangle BCE \text{, dus } \begin{array}{c|c} AC & AD \\ \hline BC & BE \end{array} \\ AC = BC \text{ (gelijkzijdige driehoek } ABC)\end{array}\right\}\ AD = BE$

11 **a** DE is een middenparallel, dus $AB = 2DE = 2 \cdot 5{,}5 = 11$.

b Twee zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 2.

$DZ = \tfrac{1}{2}AZ = \tfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$

c $BE = 3EZ = 3 \cdot 4 = 12$

Onderzoek Bewijzen uit het ongerijmde

Bladzijde 93

1

1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0

2 Zet je een 0 naast een van de andere twee nullen, dan komen er drie enen in de overgebleven vakjes. Er staan dan drie gelijke cijfers naast elkaar, en dat mag niet.

Bladzijde 94

3 **a**
- In de vakjes moeten nog een nul en drie enen komen.
- Stel ik zet een 0 in één van de gekleurde vakjes.
- Dan komt er een 1 in elk van de overige lege vakjes.
- In de laatste drie vakjes komen dan drie enen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
- Er kan in de gekleurde vakjes dus geen 0 komen te staan.
- Dus in beide gekleurde vakjes moet een 1 staan.

0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0			1

b
- In de vakjes moeten nog een nul en drie enen komen.
- Stel ik zet een 0 in het eerste of het tweede gekleurde vakje.
- Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 1 te staan.
- In het eerste vakje na de gekleurde vakjes staat ook een 1, dus dan komen er drie enen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
- Er kan in het eerste en in het tweede gekleurde vakje dus geen 0 komen te staan.
- Dus in het eerste en in het tweede gekleurde vakje moet een 1 staan, en dus in het derde gekleurde vakje een 0 en in het vierde gekleurde vakje een 1.

0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0

c In de vakjes moeten nog drie nullen en twee enen komen.
In de lege witte vakjes kunnen niet twee nullen of twee enen komen, want dan staan er of drie nullen of drie enen naast elkaar, en dat mag niet. Dus in de twee lege witte vakjes komen een 0 en een 1.
In de gekleurde vakjes moeten dan nog twee nullen en een 1 komen.
- Stel ik zet een 1 in het eerste gekleurde vakje.
- Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 0 te staan.
- In de drie laatste vakjes komen dan drie nullen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
- Stel ik zet een 1 in het laatste gekleurde vakje.
- Dan komt er in elk van de andere twee gekleurde vakjes een 0 te staan.
- In de drie voor-na-laatste vakjes komen dan drie nullen naast elkaar te staan, en dat mag niet.
- Er kan in het eerste en in het derde gekleurde vakje dus geen 1 komen te staan.
- Dus in het eerste gekleurde vakje moet een 0 staan, in het tweede gekleurde vakje een 1, en in het derde gekleurde vakje een 0.

1			0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0

4

1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1

5 **a** *

b
- Zowel sneller als langzamer vallen is met elkaar in tegenspraak.
- Dus de aanname 'we vallen niet even snel' moet wel onjuist zijn.
- We vallen dus even snel.

6
- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het grootste getal dat kleiner is dan 10'.
- Dus de aanname 'x is het grootste getal dat kleiner is dan 10' is onjuist.
- Er bestaat dus geen grootste getal dat kleiner is dan 10.

7
- Stel x is het kleinste getal dat groter is dan 100.
- Het gemiddelde g van x en 100 is kleiner dan x en groter dan 100.
- Er is dus een getal g dat kleiner is dan x en groter is dan 100.
- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het kleinste getal dat groter is dan 100'.
- Dus de aanname 'x is het kleinste getal dat groter is dan 100' is onjuist.
- Er bestaat dus geen kleinste getal dat groter is dan 100.

Bladzijde 95

8
- Stel x is het grootste getal.
- Het getal $g = x + 1$ is groter dan x.
- Er is dus een getal g dat groter is dan x.
- Dit is in tegenspraak met de aanname 'x is het grootste getal'.
- Dus de aanname 'x is het grootste getal' is onjuist.
- Er bestaat dus geen grootste getal.

9
- Stel er is geen chauffeur met acht of meer boetes.
- Het maximale aantal boetes dat de 68 chauffeurs samen hebben gekregen, is dan $68 \cdot 7 = 476$.
- Dit is in tegenspraak met het totale aantal van 477 boetes.
- Dus de aanname 'er is geen chauffeur met acht of meer boetes' is onjuist.
- Er is dus minstens één chauffeur die acht of meer boetes heeft gekregen.

10
- Stel er is geen dag waarop minstens zeven leerlingen jarig zijn.
- Het maximale aantal leerlingen dat op het Regiuscollege kan zitten, is dan $365 \cdot 6 = 2190$.
- Dit is in tegenspraak met het totale aantal van 2197 leerlingen.
- Dus de aanname 'er is geen dag waarop minstens zeven leerlingen jarig zijn' is onjuist.
- Er zijn dus minstens zeven leerlingen van het Regiuscollege op dezelfde dag jarig.

11 **a** $p^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

b Als k een geheel getal is, dan is $2k^2 + 2k$ dat ook.
Stel $2k^2 + 2k = m$, dan is $p^2 = 2m + 1$ met m een geheel getal, en dus is p^2 een oneven getal.

c Als p oneven is, dan volgt hieruit dat p^2 oneven is.
Dus p is oneven levert nooit op dat p^2 even is.
Dus als p^2 een even getal is, dan moet p even zijn.

3 Kwadratische problemen

Voorkennis Ontbinden in factoren en kwadratische vergelijkingen

Bladzijde 98

1
a $x^2 - 12x = x(x - 12)$
b $x^2 + x = x(x + 1)$
c $5x^2 - 3x = x(5x - 3)$
d $7x^2 + 12x = x(7x + 12)$

2
a $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$
b $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$
c $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$
d $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$
e $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$
f $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$

Bladzijde 99

3
a $x^2 - 7x - 18 = (x + 2)(x - 9)$
b $x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$
c $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$
d $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$
e $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$
f $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

4
a $x^2 + 10x + 16 = 0$
$(x + 2)(x + 8) = 0$
$x + 2 = 0 \vee x + 8 = 0$
$x = -2 \vee x = -8$
b $x^2 + 10x = 0$
$x(x + 10) = 0$
$x = 0 \vee x + 10 = 0$
$x = 0 \vee x = -10$
c $x^2 - 2x - 15 = 0$
$(x + 3)(x - 5) = 0$
$x + 3 = 0 \vee x - 5 = 0$
$x = -3 \vee x = 5$
d $x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = 0 \vee x = 1$
e $x^2 + 7x - 30 = 0$
$(x - 3)(x + 10) = 0$
$x - 3 = 0 \vee x + 10 = 0$
$x = 3 \vee x = -10$
f $x^2 + x - 72 = 0$
$(x - 8)(x + 9) = 0$
$x - 8 = 0 \vee x + 9 = 0$
$x = 8 \vee x = -9$

5
a $x^2 + 2x = 24$
$x^2 + 2x - 24 = 0$
$(x - 4)(x + 6) = 0$
$x - 4 = 0 \vee x + 6 = 0$
$x = 4 \vee x = -6$
b $x^2 = 3x + 18$
$x^2 - 3x - 18 = 0$
$(x + 3)(x - 6) = 0$
$x + 3 = 0 \vee x - 6 = 0$
$x = -3 \vee x = 6$
c $x^2 - 7 = 6x$
$x^2 - 6x - 7 = 0$
$(x + 1)(x - 7) = 0$
$x + 1 = 0 \vee x - 7 = 0$
$x = -1 \vee x = 7$
d $x^2 + 40 = 14x$
$x^2 - 14x + 40 = 0$
$(x - 4)(x - 10) = 0$
$x - 4 = 0 \vee x - 10 = 0$
$x = 4 \vee x = 10$
e $x^2 = 16x$
$x^2 - 16x = 0$
$x(x - 16) = 0$
$x = 0 \vee x - 16 = 0$
$x = 0 \vee x = 16$
f $x^2 = 16x + 36$
$x^2 - 16x - 36 = 0$
$(x + 2)(x - 18) = 0$
$x + 2 = 0 \vee x - 18 = 0$
$x = -2 \vee x = 18$

6
a $x(x + 1) = 5x$
$x^2 + x = 5x$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0 \vee x - 4 = 0$
$x = 0 \vee x = 4$
b $(2t - 1)(t + 2) = 0$
$2t - 1 = 0 \vee t + 2 = 0$
$2t = 1 \vee t = -2$
$t = \frac{1}{2} \vee t = -2$
c $(x - 2)^2 = 14 - x$
$(x - 2)(x - 2) = 14 - x$
$x^2 - 2x - 2x + 4 = 14 - x$
$x^2 - 4x + 4 = 14 - x$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$(x + 2)(x - 5) = 0$
$x + 2 = 0 \vee x - 5 = 0$
$x = -2 \vee x = 5$
d $(p - 4)(p + 4) = 6p$
$p^2 + 4p - 4p - 16 = 6p$
$p^2 - 16 = 6p$
$p^2 - 6p - 16 = 0$
$(p + 2)(p - 8) = 0$
$p + 2 = 0 \vee p - 8 = 0$
$p = -2 \vee p = 8$
e $(2a + 5)(2a - 5) = 0$
$2a + 5 = 0 \vee 2a - 5 = 0$
$2a = -5 \vee 2a = 5$
$a = -2\frac{1}{2} \vee a = 2\frac{1}{2}$
f $(x + 3)^2 = 2x + 9$
$(x + 3)(x + 3) = 2x + 9$
$x^2 + 3x + 3x + 9 = 2x + 9$
$x^2 + 6x + 9 = 2x + 9$
$x^2 + 4x = 0$
$x(x + 4) = 0$
$x = 0 \vee x + 4 = 0$
$x = 0 \vee x = -4$

3.1 Kwadratische vergelijkingen

Bladzijde 100

1 **a** $x^2 + 2x - 24 = 0$
$(x - 4)(x + 6) = 0$
$x - 4 = 0 \vee x + 6 = 0$
$x = 4 \vee x = -6$

b Dit heeft geen zin omdat de product-som-methode alleen werkt bij een vergelijking van de vorm $x^2 + \ldots x + \ldots = 0$.

Bladzijde 101

2 **a** $2x^2 - 32x - 72 = 0$
$x^2 - 16x - 36 = 0$
$(x + 2)(x - 18) = 0$
$x = -2 \vee x = 18$

b $-x^2 + 6x - 5 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 1 \vee x = 5$

c $\frac{1}{4}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 12 = 0$
$x^2 + 14x + 48 = 0$
$(x + 6)(x + 8) = 0$
$x = -6 \vee x = -8$

d $3x^2 + 135 = 54x$
$3x^2 - 54x + 135 = 0$
$x^2 - 18x + 45 = 0$
$(x - 3)(x - 15) = 0$
$x = 3 \vee x = 15$

e $4x^2 = 60 - 8x$
$4x^2 + 8x - 60 = 0$
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(x - 3)(x + 5) = 0$
$x = 3 \vee x = -5$

f $-\frac{1}{2}x^2 = 3x - 8$
$-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8 = 0$
$x^2 + 6x - 16 = 0$
$(x - 2)(x + 8) = 0$
$x = 2 \vee x = -8$

3 **a** $-2x^2 + 48 = 10x$
$-2x^2 - 10x + 48 = 0$
$x^2 + 5x - 24 = 0$
$(x - 3)(x + 8) = 0$
$x = 3 \vee x = -8$

b $(3x - 1)(5x + 30) = 0$
$3x - 1 = 0 \vee 5x + 30 = 0$
$3x = 1 \vee 5x = -30$
$x = \frac{1}{3} \vee x = -6$

c $(\frac{1}{2}x - 3)^2 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$
$(\frac{1}{2}x - 3)(\frac{1}{2}x - 3) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$
$\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}x + 9 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$
$x^2 - 6x - 6x + 36 = 6 - x$
$x^2 - 12x + 36 = 6 - x$
$x^2 - 11x + 30 = 0$
$(x - 5)(x - 6) = 0$
$x = 5 \vee x = 6$

d $(x - 2)(2x - 5) = x + 2$
$2x^2 - 5x - 4x + 10 = x + 2$
$2x^2 - 9x + 10 = x + 2$
$2x^2 - 10x + 8 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x - 1)(x - 4) = 0$
$x = 1 \vee x = 4$

L1 **a** $3x^2 + 15x - 18 = 0$
$x^2 + 5x - 6 = 0$
$(x - 1)(x + 6) = 0$
$x = 1 \vee x = -6$

b $\frac{1}{6}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3 = 0$
$x^2 - 9x + 18 = 0$
$(x - 3)(x - 6) = 0$
$x = 3 \vee x = 6$

4 **a** $x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5$

b $x = 8 \vee x = -2$

Bladzijde 102

5 **a** $(x+12)^2 = 15$
$x + 12 = \sqrt{15} \vee x + 12 = -\sqrt{15}$
$x = -12 + \sqrt{15} \vee x = -12 - \sqrt{15}$
$x \approx -8{,}13 \vee x \approx -15{,}87$
b $(x-1)^2 = -9$
geen oplossing
c $3(x+17)^2 = 75$
$(x+17)^2 = 25$
$x + 17 = 5 \vee x + 17 = -5$
$x = -12 \vee x = -22$
d $(x-81)^2 = 0$
$x - 81 = 0$
$x = 81$
e $-2(x-7)^2 + 100 = 10$
$-2(x-7)^2 = -90$
$(x-7)^2 = 45$
$x - 7 = \sqrt{45} \vee x - 7 = -\sqrt{45}$
$x = 7 + \sqrt{45} \vee x = 7 - \sqrt{45}$
$x \approx 13{,}71 \vee x \approx 0{,}29$
f $\frac{1}{2}(x + 1\frac{1}{2})^2 - 2 = 0$
$\frac{1}{2}(x + 1\frac{1}{2})^2 = 2$
$(x + 1\frac{1}{2})^2 = 4$
$x + 1\frac{1}{2} = 2 \vee x + 1\frac{1}{2} = -2$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -3\frac{1}{2}$

6 **a** $4(x - 2\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{4} = 5$
$4(x - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{16}$
$x - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4} \vee x - 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{4}$
$x = 3\frac{3}{4} \vee x = 1\frac{1}{4}$
b $(x+31)^2 + 20 = 0$
$(x+31)^2 = -20$
geen oplossing
c $7(x-1)^2 + 12 = 12$
$7(x-1)^2 = 0$
$(x-1)^2 = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$
d $-(x-6)^2 + 9 = 4$
$-(x-6)^2 = -5$
$(x-6)^2 = 5$
$x - 6 = \sqrt{5} \vee x - 6 = -\sqrt{5}$
$x = 6 + \sqrt{5} \vee x = 6 - \sqrt{5}$
$x \approx 8{,}24 \vee x \approx 3{,}76$

7 Voor de oppervlakte van het stuk grond geldt $\frac{1}{2}(x+7)^2 = 49$
$(x+7)^2 = 98$
$x + 7 = \sqrt{98} \vee x + 7 = -\sqrt{98}$
$x = -7 + \sqrt{98} \vee x = -7 - \sqrt{98}$
$x = 2{,}899\ldots \vee x = -16{,}899\ldots$
$x = -16{,}899\ldots$ past niet bij de situatie.
Dus de oppervlakte van het deel dat ingezaaid wordt met gras is $49 - 2{,}899\ldots^2 \approx 40{,}6$ m².

L2 **a** $(x-3)^2 = 49$
$x - 3 = 7 \vee x - 3 = -7$
$x = 10 \vee x = -4$
b $-3(x+2)^2 - 5 = -68$
$-3(x+2)^2 = -63$
$(x+2)^2 = 21$
$x + 2 = \sqrt{21} \vee x + 2 = -\sqrt{21}$
$x = -2 + \sqrt{21} \vee x = -2 - \sqrt{21}$
$x \approx 2{,}58 \vee x \approx -6{,}58$
c $5(x+11)^2 = 0$
$(x+11)^2 = 0$
$x + 11 = 0$
$x = -11$

3.2 Kwadratische functies

Bladzijde 103

8 **a** $f(3) = 3 \cdot 3^2 + 8 = 3 \cdot 9 + 8 = 35$
b $f(-8) = 3 \cdot (-8)^2 + 8 = 3 \cdot 64 + 8 = 200$
$f(0) = 3 \cdot 0^2 + 8 = 3 \cdot 0 + 8 = 8$
$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 8 = 3 \cdot 1 + 8 = 11$

9 **a** $g(5) = -2 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = -10$
$g(-3) = -2 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot -3 = -42$
b $g(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot -1 = -10$
Dus P ligt op de grafiek van g.

Bladzijde 104

10 **a** $y = 2x^2 - 7x - 5$

b $h(5) = 2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 - 5 = 10$
$h(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - 7 \cdot -4 - 5 = 55$

c $h(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot -1 - 5 = 4 \neq -8$
Dus A ligt niet op de grafiek van h.

d $y_B = h(6) = 2 \cdot 6^2 - 7 \cdot 6 - 5 = 25$

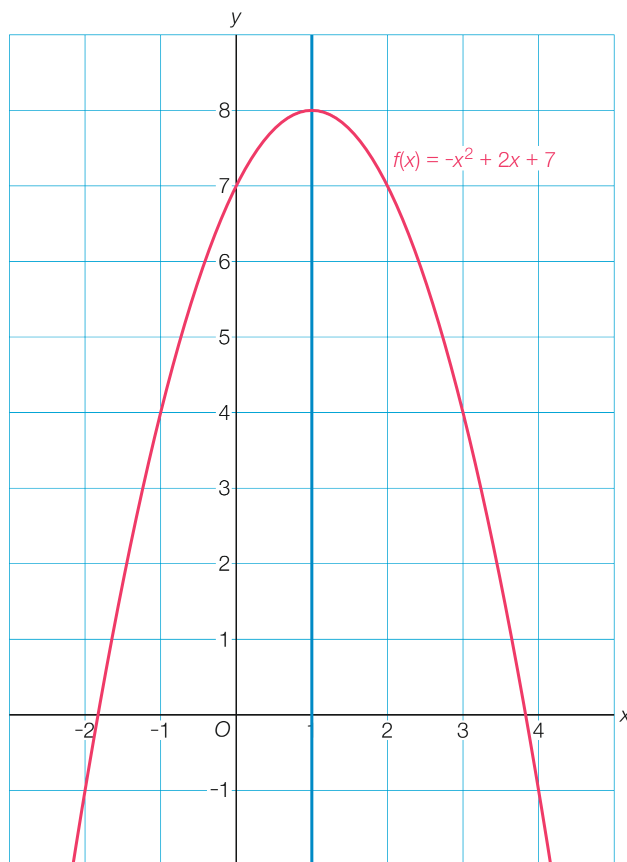
11 **a** $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot -2 + 7 = -1$
$f(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 7 = -1$
Dus $f(-2) = f(4)$.

b

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−1	4	7	8	7	4	−1

c, d Zie de figuur hiernaast.
De grafiek is een parabool.

e Het hoogste punt is (1, 8).



Bladzijde 105

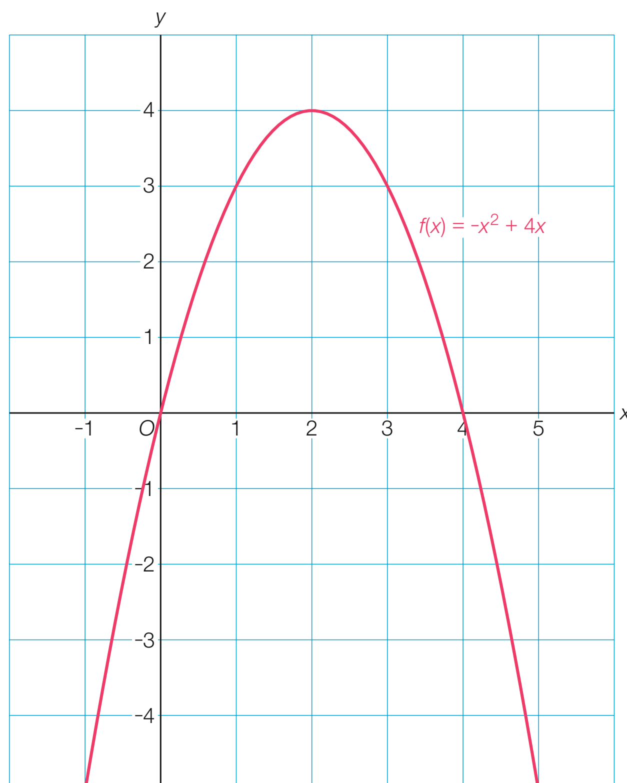
12 **a** $f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$
$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = 3$
Dus $f(1) = f(3)$. Dit geeft $x_{top} = \frac{1+3}{2} = 2$.

b

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−5	0	3	4	3	0	−5

Je krijgt dan een tabel met zeven punten waarbij x_{top} in het midden van de bovenste rij van de tabel komt te staan.
Zie de figuur hiernaast.

c De top is het punt (2, 4).



13 **a** $g(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot -4 + 1 = 1$

$g(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$

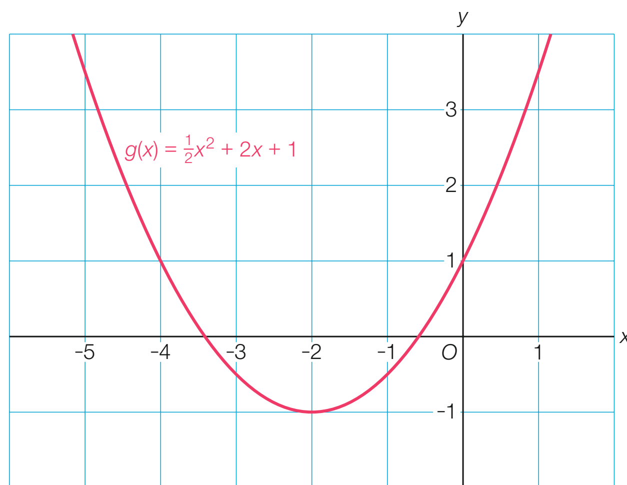
Dus $g(-4) = g(0)$.

b

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	$3\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$3\frac{1}{2}$

Zie de figuur hiernaast.

De top is het punt $(-2, -1)$.



c $g(-10) = \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 + 2 \cdot -10 + 1 = 31$

Dus A ligt op de grafiek van g.

14 **a** $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3$

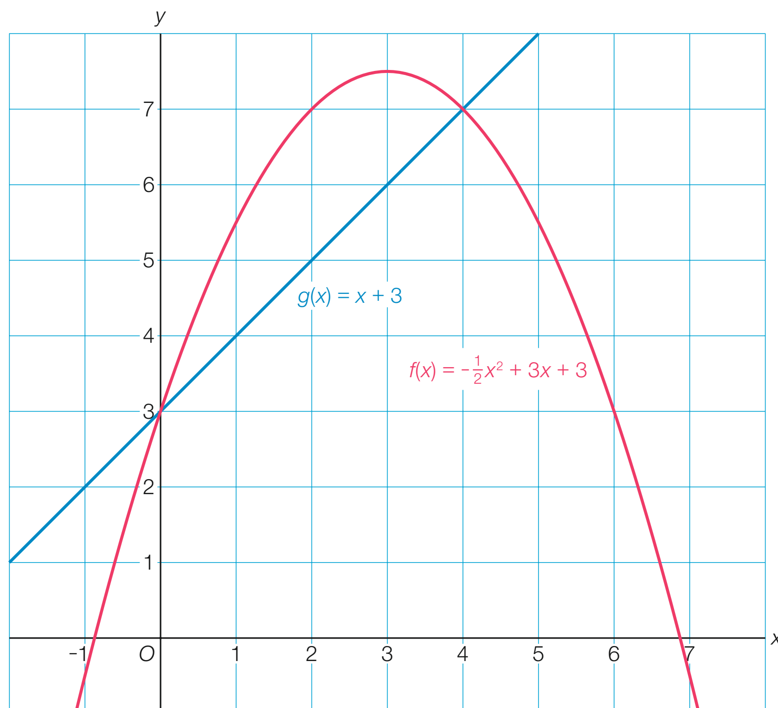
$f(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 3 = 3$

Dus $f(0) = f(6)$.

b

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	$5\frac{1}{2}$	7	$7\frac{1}{2}$	7	$5\frac{1}{2}$	3

x	0	3
$g(x)$	3	6



c $A(0, 3)$ en $B(4, 7)$

d $f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 3 \cdot -4 + 3 = -17$, dus $Q(-4, -17)$.

$g(-4) = -4 + 3 = -1$, dus $R(-4, -1)$.

$QR = y_R - y_Q = -1 - -17 = 16$

15 A ligt op de grafiek van f, dus $f(-2) = 10$.

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 - 5 \cdot -2 + 8 = 4a + 10 + 8 = 4a + 18$, dus $4a + 18 = 10$

$4a = -8$

$a = -2$

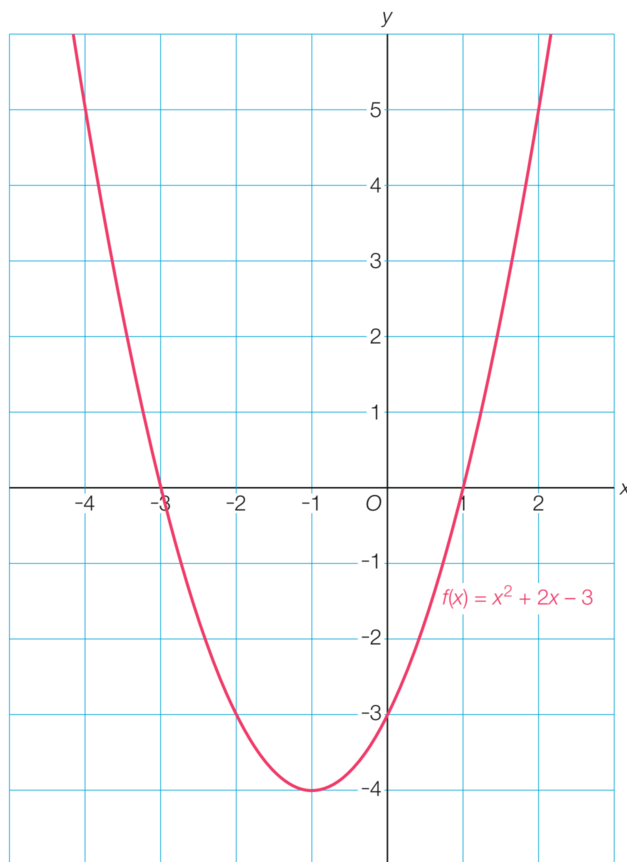
$a < 0$, dus de grafiek van f is een bergparabool.

L3 **a** $f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot -3 - 3 = 0$
$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$
Dus $f(-3) = f(1)$.

b

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Zie de figuur hiernaast.



c $f(-7) = (-7)^2 + 2 \cdot -7 - 3 = 32 \neq 30$
Dus B ligt niet op de grafiek van f.

Bladzijde 106

16 **a** $f(x) = 0$ geeft $-x^2 + x + 6 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$
Dus $A(-2, 0)$ en $B(3, 0)$.

b $f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6$, dus $C(0, 6)$.

c $f(x) = g(x)$ geeft $-x^2 + x + 6 = -2x + 8$
$-x^2 + 3x - 2 = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x - 1)(x - 2) = 0$
$x = 1 \vee x = 2$
$g(1) = -2 \cdot 1 + 8 = 6$, dus $D(1, 6)$.
$g(2) = -2 \cdot 2 + 8 = 4$, dus $E(2, 4)$.

17 **a** $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
Dus $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$.
$f(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{2}{3} \cdot 0 + 1 = 1$, dus $C(0, 1)$.

b $g(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} = 0$
$4x - 5 = 0$
$4x = 5$
$x = 1\frac{1}{4}$
Dus $D(1\frac{1}{4}, 0)$.
$g(0) = 1\frac{1}{3} \cdot 0 - 1\frac{2}{3} = -1\frac{2}{3}$, dus $E(0, -1\frac{2}{3})$.

c $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$

$x^2 - 2x - 3 = -4x + 5$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$

$x = 2 \vee x = -4$

$g(-4) = 1\frac{1}{3} \cdot -4 - 1\frac{2}{3} = -7$, dus $P(-4, 7)$.

$g(2) = 1\frac{1}{3} \cdot 2 - 1\frac{2}{3} = 1$, dus $Q(2, 1)$.

18 **a** $h = 0$ geeft $-0{,}125x^2 + 2x - 6 = 0$

$x^2 - 16x + 48 = 0$

$(x - 4)(x - 12) = 0$

$x = 4 \vee x = 12$

Dus $A(4, 0)$ en $B(12, 0)$.

Hieruit volgt $AB = x_B - x_A = 12 - 4 = 8$ meter.

b $x_{top} = \frac{4 + 12}{2} = 8$

Het midden van de boot ligt bij $x = 8$.

De zijkanten van de boot liggen bij $x = 8 - 2 = 6$ en bij $x = 8 + 2 = 10$.

$x = 6$ geeft $h = -0{,}125 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 - 6 = 1{,}5$

De hoogte van de brug bij $x = 6$ en, vanwege symmetrie ook bij $x = 10$, is 1,5 meter en de boot steekt 1,4 meter boven het wateroppervlak uit.

Dus de boot kan onder de brug door varen.

Bladzijde 107

19 $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x - 3)(x + 4) = 0$

$x = 3 \vee x = -4$

Dus $A(-4, 0)$ en $C(3, 0)$.

$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 6 = 6$, dus $E(0, 6)$.

$g(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = 0$

$3x + 7 = 0$

$3x = -7$

$x = -2\frac{1}{3}$

Dus $B(-2\frac{1}{3}, 0)$.

$g(0) = 1\frac{1}{2} \cdot 0 + 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $D(0, 3\frac{1}{2})$.

$f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6 = 1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$x^2 + x - 12 = -3x - 7$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x - 1)(x + 5) = 0$

$x = 1 \vee x = -5$

$g(-5) = 1\frac{1}{2} \cdot -5 + 3\frac{1}{2} = -4$, dus $F(-5, -4)$.

$g(1) = 1\frac{1}{2} \cdot 1 + 3\frac{1}{2} = 5$, dus $G(1, 5)$.

20 **a** $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 6 = 6$, dus $E(0, 6)$.

$g(0) = 1\frac{1}{2} \cdot 0 + 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $D(0, 3\frac{1}{2})$.

$DE = y_E - y_D = 6 - 3\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

b $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x - 3)(x + 4) = 0$

$x = 3 \vee x = -4$

Dus $A(-4, 0)$ en $C(3, 0)$.

$g(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = 0$

$3x + 7 = 0$

$3x = -7$

$x = -2\frac{1}{3}$

Dus $B(-2\frac{1}{3}, 0)$.

$AB = x_B - x_A = -2\frac{1}{3} - -4 = 1\frac{2}{3}$ en $BC = x_C - x_B = 3 - -2\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

$3 \cdot 1\frac{2}{3} = 5 \neq 5\frac{1}{3}$, dus BC is niet drie keer zo lang als AB.

c $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6 = 1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$x^2 + x - 12 = -3x - 7$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x - 1)(x + 5) = 0$

$x = 1 \vee x = -5$

$g(-5) = 1\frac{1}{2} \cdot -5 + 3\frac{1}{2} = -4$, dus $F(-5, -4)$.

$g(1) = 1\frac{1}{2} \cdot 1 + 3\frac{1}{2} = 5$, dus $G(1, 5)$.

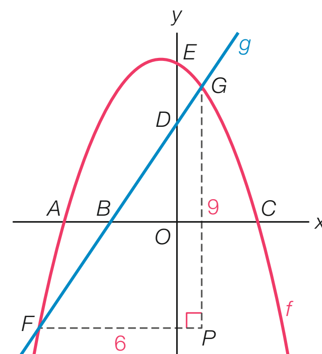
Zie de figuur hiernaast.

$FP = x_G - x_F = 1 - -5 = 6$ en $GP = y_G - y_F = 5 - -4 = 9$

$\angle P = 90°$, dus $FG^2 = FP^2 + GP^2$

$FG^2 = 6^2 + 9^2 = 117$

$FG = \sqrt{117} \approx 10{,}82$



L4 **a** $f(x) = 0$ geeft $-x^2 + 2x + 15 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x + 3)(x - 5) = 0$

$x = -3 \vee x = 5$

Dus $A(-3, 0)$ en $B(5, 0)$.

$f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 15 = 15$, dus $C(0, 15)$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $-x^2 + 2x + 15 = 3x + 3$

$-x^2 - x + 12 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x - 3)(x + 4) = 0$

$x = 3 \vee x = -4$

$g(-4) = 3 \cdot -4 + 3 = -9$, dus $P(-4, -9)$.

$g(3) = 3 \cdot 3 + 3 = 12$, dus $Q(3, 12)$.

21 **a** $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

Dus de grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(0, 0)$ en $(2, 0)$.

$x_{top} = \frac{0 + 2}{2} = 1$

b Door de grafiek van f met 3 omlaag te schuiven, blijft de x_{top} gelijk.
Dus van de grafiek van g is $x_{top} = 1$.

c Door de grafiek van f met 2 omhoog te schuiven, blijft de x_{top} gelijk.
Dus van de grafiek van h is $x_{top} = 1$.

Bladzijde 109

22 **a** $a = 1$ en $b = 4$, dus $x_{top} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$.
$y_{top} = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot -2 + 1 = -3$
Dus de top is het punt (−2, −3).

b $a = -1$ en $b = 2$, dus $x_{top} = -\frac{2}{2 \cdot -1} = 1$.
$y_{top} = g(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 10 = 11$
Dus de top is het punt (1, 11).

c $a = -0{,}25$ en $b = 4$, dus $x_{top} = -\frac{4}{2 \cdot -0{,}25} = 8$.
$y_{top} = k(8) = -0{,}25 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 - 17 = -1$
Dus de top is het punt (8, −1).

23 **a** $a = -0{,}5$ en $b = 1{,}5$, dus $x_{top} = -\frac{1{,}5}{2 \cdot -0{,}5} = 1{,}5$.
$y_{top} = f(1{,}5) = -0{,}5 \cdot 1{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 6 = 7{,}125$
Dus de top van de grafiek van f is het punt (1,5; 7,125).
$g(1{,}5) = 0{,}5 \cdot 1{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5 + 12 = 7{,}125$
Dus de top van de grafiek van f ligt op de grafiek van g.

b $a = 0{,}5$ en $b = -4$, dus $x_{top} = -\frac{-4}{2 \cdot 0{,}5} = 4$.
$y_{top} = g(4) = 0{,}5 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 12 = 4$
Dus de top van de grafiek van g is het punt (4, 4).
$f(4) = -0{,}5 \cdot 4^2 + 1{,}5 \cdot 4 + 6 = 4$
Dus de top van de grafiek van g ligt op de grafiek van f.

24 **a** $a = -0{,}025$ en $b = 1$, dus $x_{top} = -\frac{1}{2 \cdot -0{,}025} = 20$.
$h_{top} = -0{,}025 \cdot 20^2 + 20 = 10$
Dus de top is het punt (20, 10).

b De maximale hoogte van de bal is 10 meter.

c $x = 36$ geeft $h = -0{,}025 \cdot 36^2 + 36 = 3{,}6$
Dus de bal gaat over Daan heen.

25 **a** Bij 6 uur ’s morgens hoort $t = 6$.
$t = 6$ geeft $T = -0{,}05 \cdot 6^2 + 1{,}5 \cdot 6 = 7{,}2$
Dus om 6 uur ’s morgens is de temperatuur 7,2 °C.
Bij 6 uur ’s avonds hoort $t = 18$.
$t = 18$ geeft $T = -0{,}05 \cdot 18^2 + 1{,}5 \cdot 18 = 10{,}8$
Dus om 6 uur ’s avonds is de temperatuur 10,8 °C.

b $a = -0{,}05$ en $b = 1{,}5$, dus $t_{top} = -\frac{1{,}5}{2 \cdot -0{,}05} = 15$.
Dus om 3 uur ’s middags is de temperatuur maximaal.

c $T_{top} = -0{,}05 \cdot 15^2 + 1{,}5 \cdot 15 = 11{,}25$
Dus de maximale temperatuur is 11,25 °C.

26 **a** $a = -0{,}1$ en $b = 1{,}5$, dus $x_{top} = -\frac{1{,}5}{2 \cdot -0{,}1} = 7{,}5$.
$h_{top} = -0{,}1 \cdot 7{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 7{,}5 - 2{,}025 = 3{,}6$
Dus de hoogte van de tunnel is 3,6 meter.

b Bij 4 meter links van het midden hoort $x = 7{,}5 - 4 = 3{,}5$.
$x = 3{,}5$ geeft $h = -0{,}1 \cdot 3{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 3{,}5 - 2{,}025 = 2$
Vanwege symmetrie is de hoogte van de tunnel 4 meter rechts van het midden ook 2 meter.
De totale kosten van de wanden zijn $2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 120 = 9600$ euro.

27 $a = -2$ en $b = 10$, dus $x_{top} = -\frac{10}{2 \cdot -2} = 2{,}5$.
$y_{top} = -2 \cdot 2{,}5^2 + 10 \cdot 2{,}5 - 3 = 9{,}5$
Dus de top van de grafiek is het punt (2,5; 9,5).
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.
Omdat de top boven de x-as ligt en de grafiek een bergparabool is, snijdt de grafiek de x-as in twee punten.

28 **a** $a = -2$ en $b = 8$, dus $x_{top} = -\frac{8}{2 \cdot -2} = 2$.
$\left.\begin{array}{l} y_{top} = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + c = 8 + c \\ y_{top} = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 + c = 5 \\ c = -3 \end{array}$

b $\left.\begin{array}{l} x_{top} = 2 \\ x_{top} = 2c \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2c = 2 \\ c = 1 \end{array}$

c $\left.\begin{array}{l} y_{top} = 8 + c \\ y_{top} = 2c \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2c = 8 + c \\ c = 8 \end{array}$

L5 $a = 3$ en $b = -12$, dus $x_{top} = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2$.
$y_{top} = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 5 = -7$
Dus de top is het punt (2, −7).

3.3 De functie f(x) = a(x − d)(x − e)

Bladzijde 110

29 **a** $f(x) = 0$ voor $x - 3 = 0$ oftewel $x = 3$, en voor $x + 5 = 0$ oftewel $x = -5$.
b (−7, 0) en (1, 0)
c (−7, 0) en (1, 0)
d (−3, 0) en (5, 0)
d (0, 0) en (8, 0)

Bladzijde 111

30 Omdat elke term van de herleiding van $(x + 2)(x - 8)$ met −1 vermenigvuldigd moet worden.

31 **a** $d = -7$ en $e = 1$, dus de snijpunten met de x-as zijn (−7, 0) en (1, 0).
$f(0) = -5(0 + 7)(0 - 1) = 35$, dus het snijpunt met de y-as is (0, 35).
$x_{top} = \frac{-7 + 1}{2} = -3$ geeft $y_{top} = f(-3) = -5(-3 + 7)(-3 - 1) = 80$
Dus de top is het punt (−3, 80).
b $d = -12$ en $e = -20$, dus de snijpunten met de x-as zijn (−12, 0) en (−20, 0).
$g(0) = -(0 + 12)(0 + 20) = -240$, dus het snijpunt met de y-as is (0, −240).
$x_{top} = \frac{-12 + -20}{2} = -16$ geeft $y_{top} = g(-16) = -(-16 + 12)(-16 + 20) = 16$
Dus de top is het punt (−16, 16).
c $d = 0$ en $e = -12$, dus de snijpunten met de x-as zijn (0, 0) en (−12, 0).
Het snijpunt met de y-as is ook (0, 0).
$x_{top} = \frac{0 + -12}{2} = -6$ geeft $y_{top} = h(-6) = 8 \cdot -6 \cdot (-6 + 12) = -288$
Dus de top is het punt (−6, −288).

32 **a** $d = -3$ en $e = 6$, dus $A(-3, 0)$ en $B(6, 0)$.
$f(0) = -\frac{1}{3}(0 + 3)(0 - 6) = 6$, dus $C(0, 6)$.
$x_{top} = \frac{-3 + 6}{2} = 1\frac{1}{2}$ geeft $y_{top} = f(1\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}(1\frac{1}{2} + 3)(1\frac{1}{2} - 6) = 6\frac{3}{4}$
Dus $T(1\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4})$.

b $y_D = f(5) = -\frac{1}{3}(5 + 3)(5 - 6) = 2\frac{2}{3}$

c $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 6) = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 3x - 18) = -\frac{1}{3}(x^2 - 3x - 18) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$

33 **a** $d = 0$ en $e = 48$, dus de snijpunten met de x-as zijn (0, 0) en (48, 0).
Dus op 48 meter van Alex komt de bal op de grond.

b $x_{top} = \dfrac{0 + 48}{2} = 24$ geeft $h_{top} = -0{,}0125 \cdot 24 \cdot (24 - 48) = 7{,}2$
Dus de bal komt 7,2 meter hoog.

c $h = -0{,}0125x(x - 48) = -0{,}0125x^2 + 0{,}6x$
Dus $a = -0{,}0125$, $b = 0{,}6$ en $c = 0$.

Bladzijde 112

34 **a** $d = 1{,}8$ en $e = 9{,}6$, dus de snijpunten met de x-as zijn (1,8; 0) en (9,6; 0).
Dus de breedte van de tunnel is $9{,}6 - 1{,}8 = 7{,}8$ meter.
$x_{top} = \dfrac{1{,}8 + 9{,}6}{2} = 5{,}7$ geeft $h_{top} = -0{,}15(5{,}7 - 1{,}8)(5{,}7 - 9{,}6) = 2{,}2815$
Dus de hoogte van de tunnel is ongeveer 2,3 meter.

b Bij de positie 2,1 meter links van B hoort $x = 9{,}6 - 2{,}1 = 7{,}5$.
$x = 7{,}5$ geeft $h = -0{,}15(7{,}5 - 1{,}8)(7{,}5 - 9{,}6) = 1{,}7955$
Dus Jordy is minstens 1,80 meter lang.

c Bij de positie 2,5 meter van A hoort $x = 1{,}8 + 2{,}5 = 4{,}3$.
$x = 4{,}3$ geeft $h = -0{,}15(4{,}3 - 1{,}8)(4{,}3 - 9{,}6) = 1{,}9875$
De scheidingswand is 1,9875 meter hoog, dus de lengte van de tunnel is $\dfrac{15{,}9}{1{,}9875} = 8$ meter.

L6 $d = 3$ en $e = -7$, dus de snijpunten met de x-as zijn (3, 0) en (−7, 0).
$f(0) = 2(0 - 3)(0 + 7) = -42$, dus het snijpunt met de y-as is (0, −42).
$x_{top} = \dfrac{3 + -7}{2} = -2$ geeft $y_{top} = f(-2) = 2(-2 - 3)(-2 + 7) = -50$
Dus de top is het punt (−2, −50).

35 De grafiek is een dalparabool, dus de formule $y = -(x + 1)(x - 5)$ valt af.
De grafiek snijdt de x-as in de punten (−1, 0) en (5, 0).
Dus de formules $y = (x - 1)(x - 5)$ en $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$ vallen af.
De top is $(2, -4\frac{1}{2})$.
$x = 2$ invullen bij $y = (x + 1)(x - 5)$ geeft $y = (2 + 1)(2 - 5) = -9$.
Dus deze formule valt af.
$x = 2$ invullen bij $y = 1\frac{1}{2}(x + 1)(x - 5)$ geeft $y = 1\frac{1}{2}(2 + 1)(2 - 5) = -13\frac{1}{2}$.
Dus deze formule valt af.
$x = 2$ invullen bij $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5)$ geeft $y = \frac{1}{2}(2 + 1)(2 - 5) = -4\frac{1}{2}$.
Dus formule III hoort bij de functie.

Bladzijde 113

36 **a** Door $A(1, 0)$ en $B(9, 0)$, dus $y = a(x - 1)(x - 9)$.
Door $C(-1, 16)$, dus $a(-1 - 1)(-1 - 9) = 16$

$$a \cdot -2 \cdot -10 = 16$$
$$20a = 16$$
$$a = \frac{4}{5}$$

Dus $y = \frac{4}{5}(x - 1)(x - 9)$.

b $x_{top} = \dfrac{1 + 9}{2} = 5$ geeft $y_{top} = \frac{4}{5}(5 - 1)(5 - 9) = -12\frac{4}{5}$
Dus de top is het punt $(5, -12\frac{4}{5})$.

37 Door (−2, 0) en (10, 0), dus $y = a(x + 2)(x - 10)$.
Door (0, 5), dus $a(0 + 2)(0 - 10) = 5$

$$a \cdot 2 \cdot -10 = 5$$
$$-20a = 5$$
$$a = -\frac{1}{4}$$

Dus $y = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 10)$.

$x_{top} = \frac{-2 + 10}{2} = 4$ geeft $y = -\frac{1}{4}(4 + 2)(4 - 10) = 9$

Dus de top is het punt (4, 9).

38 Door (0, 0) en (40, 0), dus $h = ax(x - 40)$.
Door (10, 6), dus $a \cdot 10 \cdot (10 - 40) = 6$

$$a \cdot 10 \cdot -30 = 6$$
$$-300a = 6$$
$$a = -\frac{1}{50}$$

Dus $h = -\frac{1}{50}x(x - 40)$.

$x_{top} = \frac{0 + 40}{2} = 20$ geeft $h_{top} = -\frac{1}{50} \cdot 20 \cdot (20 - 40) = 8$

Dus de maximale hoogte van de bal is 8 meter.

39 Uit $x_A = -4$, $x_T = 2$ en de symmetrie van de parabool volgt dat $x_B = 8$.
Dus $y = a(x + 4)(x - 8)$.
Door (2, 72), dus $a \cdot (2 + 4)(2 - 8) = 72$

$$a \cdot 6 \cdot -6 = 72$$
$$-36a = 72$$
$$a = -2$$

Dus $y = -2(x + 4)(x - 8) = -2(x^2 - 8x + 4x - 32) = -2(x^2 - 4x - 32) = -2x^2 + 8x + 64$.

L7 Door $A(2, 0)$ en $B(12, 0)$, dus $y = a(x - 2)(x - 12)$.
Door $C(4, 24)$, dus $a(4 - 2)(4 - 12) = 24$

$$a \cdot 2 \cdot -8 = 24$$
$$-16a = 24$$
$$a = -1\frac{1}{2}$$

Dus $y = -1\frac{1}{2}(x - 2)(x - 12)$.

3.4 De functie $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Bladzijde 114

40 **a** Als je de grafiek van f met 2 omhoog schuift valt deze precies op de grafiek van g.
Je ziet dat $g(x) = f(x) + 2$.
b Als je de grafiek van f met 1 omlaag schuift valt deze precies op de grafiek van h.
Je ziet dat $h(x) = f(x) - 1$.

41 **a** Als je de grafiek van f met 2 naar links schuift valt deze precies op de grafiek van g.
Je ziet dat $g(x) = f(x + 2)$.
b Als je de grafiek van f met 1 naar rechts schuift valt deze precies op de grafiek van h.
Je ziet dat $h(x) = f(x - 1)$.

Bladzijde 115

42 **a** $f(x) = 0{,}8x^2 + 2 \xrightarrow{\text{3 naar rechts}} g(x) = 0{,}8(x - 3)^2 + 2$

b $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3 \xrightarrow{\text{5 naar links, 3 omlaag}} k(x) = -\frac{1}{4}(x + 5)^2 + 3 - 3$, dus $k(x) = -\frac{1}{4}(x + 5)^2$.

Bladzijde 116

43 **a** $y = -x^2 + 2 \xrightarrow{\text{3 omlaag}} y = -x^2 + 2 - 3$, dus $y = -x^2 - 1$.
b $y = -x^2 + 2 \xrightarrow{\text{4 naar rechts}} y = -(x - 4)^2 + 2$

c $y = -x^2 + 2 \xrightarrow{\text{7 naar links, 4 omhoog}} y = -(x+7)^2 + 2 + 4$, dus $y = -(x+7)^2 + 6$.
d $y = -x^2 + 2 \xrightarrow{\text{2 naar links, 3 omlaag}} y = -(x+2)^2 + 2 - 3$, dus $y = -(x+2)^2 - 1$.

44 **a** Door de grafiek van f twee naar rechts en vijf omhoog te schuiven krijg je de grafiek van g.
b Door de grafiek van h vier naar links en negen omlaag te schuiven krijg je de grafiek van k.

45 $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3 \xrightarrow{\text{5 naar links, 2 omlaag}} g(x) = -\frac{1}{4}(x+5)^2 + 3 - 2$, dus $g(x) = -\frac{1}{4}(x+5)^2 + 1$.

$g(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{4}(x+5)^2 + 1 = 0$
$-\frac{1}{4}(x+5)^2 = -1$
$(x+5)^2 = 4$
$x + 5 = 2 \vee x + 5 = -2$
$x = -3 \vee x = -7$
Dus $AB = -3 - -7 = 4$.

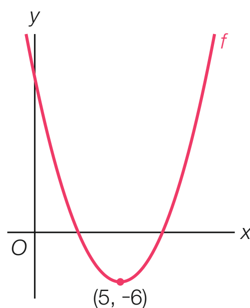
46 Door de grafiek van g met 8 naar links en 5 omhoog te schuiven, valt deze samen met de grafiek van f.
$g(x) = 6(x-4)^2 - 2 \xrightarrow{\text{8 naar links, 5 omhoog}} f(x) = 6(x - 4 + 8)^2 - 2 + 5$, dus $f(x) = 6(x+4)^2 + 3$.
$f(x) = 6(x+4)^2 + 3$
$= 6(x+4)(x+4) + 3$
$= 6(x^2 + 4x + 4x + 16) + 3$
$= 6(x^2 + 8x + 16) + 3$
$= 6x^2 + 48x + 96 + 3$
$= 6x^2 + 48x + 99$
Dus $a = 6$, $b = 48$ en $c = 99$.

L8 $y = 3x^2 + 2 \xrightarrow{\text{8 naar rechts, 11 omlaag}} y = 3(x-8)^2 + 2 - 11$, dus $y = 3(x-8)^2 - 9$.

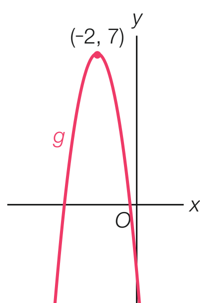
47 **a** Door de grafiek van f met 3 omlaag te schuiven, ontstaat de grafiek van g. De top van de grafiek van g is het punt $(0, -3)$.
b De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f met 5 omhoog te schuiven. Dus de top van de grafiek van h is het punt $(0, 5)$.

Bladzijde 117

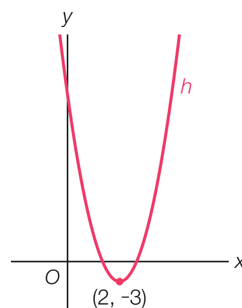
48 **a** $a = 1$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt $(5, -6)$.



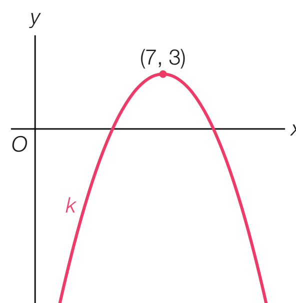
b $a = -3$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(-2, 7)$.



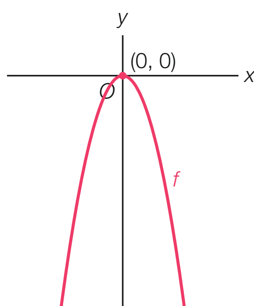
c $a = 7$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt $(2, -3)$.



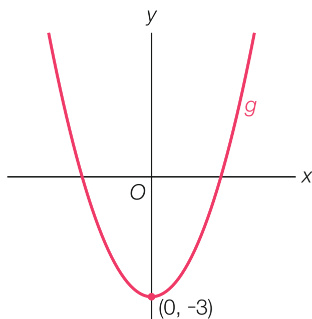
d $a = -2$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(7, 3)$.



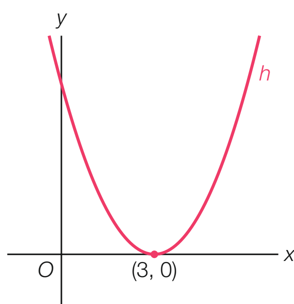
49 **a** $a = -3$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt (0, 0).



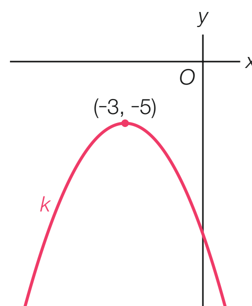
b $a = 1$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt (0, −3).



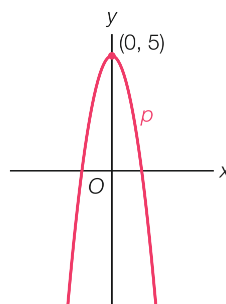
c $a = 1$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt (3, 0).



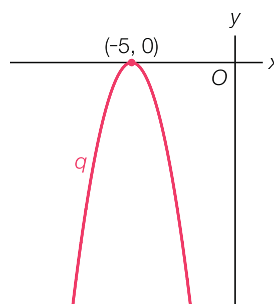
d $a = -1$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt (−3, −5).



e $a = -3$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt (0, 5).



f $a = -3$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt (−5, 0).



Bladzijde 118

50 **a** De top is het punt (−3, −6).

b $a = -2$ en $b = 12$, dus $x_{top} = -\frac{12}{2 \cdot -2} = 3$.

$y_{top} = g(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 18$
Dus de top is het punt (3, 18).

c $d = -2$ en $e = -6$, dus $x_{top} = \frac{-2 + -6}{2} = -4$.

$y_{top} = h(-4) = 3(-4 + 2)(-4 + 6) = -12$
Dus de top is het punt (−4, −12).

d $a = -0{,}2$ en $b = 1{,}8$, dus $x_{top} = -\frac{1{,}8}{2 \cdot -0{,}2} = 4{,}5$.

$y_{top} = k(4{,}5) = -0{,}2 \cdot 4{,}5^2 + 1{,}8 \cdot 4{,}5 + 10 = 14{,}05$
Dus de top is het punt (4,5; 14,05).

e De top is het punt (−1,8; −1,3).

f $d = 0$ en $e = -1{,}8$, dus $x_{top} = \frac{0 + -1{,}8}{2} = -0{,}9$.

$y_{top} = q(-0{,}9) = 0{,}2 \cdot -0{,}9 \cdot (-0{,}9 + 1{,}8) = -0{,}162$
Dus de top is het punt (−0,9; −0,162).

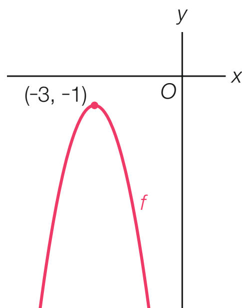
51 **a** De top van de parabool is het punt (640, 70), dus het wegdek bevindt zich 70 meter boven het wateroppervlak.
$x = 0$ geeft $h = 0{,}00039(0 - 640)^2 + 70 = 229{,}744$, dus de hoogte van de pijlers boven het wateroppervlak is 229,744 meter.
Dus de pijlers steken $229{,}744 - 70 \approx 160$ meter boven het wegdek uit.

b De afstand van de eerste pijler tot het laagste punt van de draagkabel is 640 meter, dus de afstand tussen de twee pijlers is $2 \cdot 640 = 1280$ meter.

c De verticale kabels zijn op een hoogte van $70 + 65 = 135$ meter boven het wateroppervlak aan de draagkabel verbonden, dus $h = 135$.
Dit geeft $0{,}00039(x - 640)^2 + 70 = 135$
$0{,}00039(x - 640)^2 = 65$
$(x - 640)^2 = 166\,666{,}66\ldots$
$x - 640 = \sqrt{166\,666{,}66\ldots} \vee x - 640 = -\sqrt{166\,666{,}66\ldots}$
$x - 640 = 408{,}24\ldots \vee x - 640 = -408{,}24\ldots$
$x = 1048{,}24\ldots \vee x = 231{,}75\ldots$
Dus de afstand tussen deze twee verticale kabels is $1048{,}24\ldots - 231{,}75\ldots \approx 816$ meter.

Alternatieve uitwerking
Door de grafiek 640 naar links en 70 naar beneden te schuiven, krijg je de grafiek van $h = 0{,}00039x^2$ met als top de oorsprong. Bij de punten B en D hoort dan $h = 65$.
Dit geeft $0{,}00039x^2 = 65$
$x^2 = 166\,666{,}66\ldots$
$x = \sqrt{166\,666{,}66\ldots} \vee x = -\sqrt{166\,666{,}66\ldots}$
$x = 408{,}24\ldots \vee x = -408{,}24\ldots$
Dus de afstand tussen deze twee verticale kabels is $2 \cdot 408{,}24\ldots \approx 816$ meter.

L9 $a = -2$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(-3, -1)$.



52 De grafiek is een bergparabool, dus de formule $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$ valt af.
De top van de parabool ligt links van de y-as, dus de formule $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$ valt af.
De top van de parabool ligt boven de x-as, dus de formule $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ valt af.
Dus formule I hoort bij de grafiek.

Bladzijde 119

53 **a** Top $(-3, -2)$, dus $y = a(x + 3)^2 - 2$.
Door $(-1, 2)$, dus $a(-1 + 3)^2 - 2 = 2$
$a \cdot 2^2 - 2 = 2$
$4a - 2 = 2$
$4a = 4$
$a = 1$
Dus $y = (x + 3)^2 - 2$.

b Top (3, 4), dus $y = a(x - 3)^2 + 4$.
Door (-1, 0), dus $a(-1 - 3)^2 + 4 = 0$

$a(-4)^2 + 4 = 0$
$16a + 4 = 0$
$16a = -4$
$a = -\frac{1}{4}$

Dus $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 4$.

c Top (-2, 1), dus $y = a(x + 2)^2 + 1$.
Door (3, 6), dus $a(3 + 2)^2 + 1 = 6$

$a \cdot 5^2 + 1 = 6$
$25a + 1 = 6$
$25a = 5$
$a = \frac{1}{5}$

Dus $y = \frac{1}{5}(x + 2)^2 + 1$.

54 **a** Top $T(5, -12)$, dus $y = a(x - 5)^2 - 12$.
Door $A(8, -39)$, dus $a(8 - 5)^2 - 12 = -39$

$a \cdot 3^2 - 12 = -39$
$9a - 12 = -39$
$9a = -27$
$a = -3$

Dus $y = -3(x - 5)^2 - 12$.

b $y = -3(x - 5)^2 - 12$
$= -3(x - 5)(x - 5) - 12$
$= -3(x^2 - 5x - 5x + 25) - 12$
$= -3(x^2 - 10x + 25) - 12$
$= -3x^2 + 30x - 75 - 12$
$= -3x^2 + 30x - 87$

c $x = 0$ geeft $y = -3 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 - 87 = -87$
Dus het snijpunt met de y-as is (0, -87).

Bladzijde 120

55 Top $T(3, 8)$, dus $y = a(x - 3)^2 + 8$.
Door $P(5, 6)$, dus $a(5 - 3)^2 + 8 = 6$

$a \cdot 2^2 + 8 = 6$
$4a + 8 = 6$
$4a = -2$
$a = -\frac{1}{2}$

Dus $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 8$.

$y = 0$ geeft $-\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 8 = 0$

$-\frac{1}{2}(x - 3)^2 = -8$
$(x - 3)^2 = 16$
$x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4$
$x = 7 \vee x = -1$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(7, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{2}(0 - 3)^2 + 8 = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 8 = 3\frac{1}{2}$
Dus $C(0, 3\frac{1}{2})$.

56 Top (2, -4), dus $f(x) = a(x - 2)^2 - 4$.
Door $A(0, 2)$, dus $a(0 - 2)^2 - 4 = 2$

$a \cdot (-2)^2 - 4 = 2$
$4a - 4 = 2$
$4a = 6$
$a = 1\frac{1}{2}$

Dus $f(x) = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$.

Door $(-1, 0)$ en $(4, 0)$, dus $g(x) = a(x + 1)(x - 4)$.
Door $(0, -2)$, dus $a(0 + 1)(0 - 4) = -2$
$a \cdot 1 \cdot -4 = -2$
$-4a = -2$
$a = \frac{1}{2}$
Dus $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 4)$.

Top $(0, 3)$, dus $h(x) = ax^2 + 3$.
Door $A(-2, 0)$, dus $a(-2)^2 + 3 = 0$
$4a + 3 = 0$
$4a = -3$
$a = -\frac{3}{4}$
Dus $h(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

Alternatieve uitwerking voor functie h
Door $(-2, 0)$ en $(2, 0)$, dus $h(x) = a(x + 2)(x - 2)$.
Door $(0, 3)$, dus $a(0 + 2)(0 - 2) = 3$
$a \cdot 2 \cdot -2 = 3$
$-4a = 3$
$a = -\frac{3}{4}$
Dus $h(x) = -\frac{3}{4}(x + 2)(x - 2)$.

57 **a** De top van de grafiek is het punt (p, q).
$a = -\frac{1}{2}$ en $b = -2$, dus $x_{top} = -\frac{-2}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = -2$.
$y_{top} = f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot -2 + 6 = 8$
Dus $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 8$.
b De grafiek snijdt de x-as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.
$y = 0$ geeft $\frac{1}{4}(x + 1)^2 - 9 = 0$
$\frac{1}{4}(x + 1)^2 = 9$
$(x + 1)^2 = 36$
$x + 1 = 6 \vee x + 1 = -6$
$x = 5 \vee x = -7$
Dus $y = \frac{1}{4}(x - 5)(x + 7)$.

58 Door $(0, 0)$ en $(2200, 0)$, dus $y = ax(x - 2200)$.
$x_{top} = \frac{0 + 2200}{2} = 1100$ geeft $y_{top} = a \cdot 1100 \cdot (1100 - 2200) = -1\,210\,000a$
Ook geldt $y_{top} = 60{,}5$, dus $-1\,210\,000a = 60{,}5$ en hieruit volgt $a = -0{,}00005$.
Dus bij het wegdek hoort de formule $y = -0{,}00005x(x - 2200)$.
Bij de linker pilaar hoort $x = 1100 - \frac{860}{2} = 670$.
Dit geeft $y = -0{,}00005 \cdot 670 \cdot (670 - 2200) = 51{,}255$.
Het wegdek bevindt zich bij de pilaren ongeveer 51 meter boven het wateroppervlak.

L10 Top $(3, 7)$, dus $y = a(x - 3)^2 + 7$.
Door $(-1, -5)$, dus $a(-1 - 3)^2 + 7 = -5$
$a \cdot (-4)^2 + 7 = -5$
$16a + 7 = -5$
$16a = -12$
$a = -\frac{3}{4}$
Dus $y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2 + 7$.

3.5 De abc-formule

Bladzijde 121

59 **a** Hij kan geen twee getallen vinden met product 2 en som -6.

b Ze krijgt $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$.
Ze kan geen twee getallen vinden met product $-\frac{2}{3}$ en som $-\frac{1}{3}$.

Bladzijde 122

60 Het getal 1 komt van $-b = --1 = 1$.
Het getal 6 komt van $2a = 2 \cdot 3 = 6$.

61 **a** $3x^2 - 7x + 2 = 0$
$a = 3$, $b = -7$ en $c = 2$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$
$x = \frac{7 + \sqrt{25}}{6} \vee x = \frac{7 - \sqrt{25}}{6}$
$x = 2 \vee x = \frac{1}{3}$

b $5x^2 - x - 4 = 0$
$a = 5$, $b = -1$ en $c = -4$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -4 = 81$
$x = \frac{1 + \sqrt{81}}{10} \vee x = \frac{1 - \sqrt{81}}{10}$
$x = 1 \vee x = -\frac{4}{5}$

c $10x^2 + 9x + 2 = 0$
$a = 10$, $b = 9$ en $c = 2$
$D = 9^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2 = 1$
$x = \frac{-9 + \sqrt{1}}{20} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{1}}{20}$
$x = -\frac{2}{5} \vee x = -\frac{1}{2}$

d $4x^2 + 5x + 1 = 0$
$a = 4$, $b = 5$ en $c = 1$
$D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$
$x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{8} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{8}$
$x = -\frac{1}{4} \vee x = -1$

e $2x^2 + 3x - 5 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = -5$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$
$x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4}$
$x = 1 \vee x = -2\frac{1}{2}$

f $7x^2 - 5x - 2 = 0$
$a = 7$, $b = -5$ en $c = -2$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot -2 = 81$
$x = \frac{5 + \sqrt{81}}{14} \vee x = \frac{5 - \sqrt{81}}{14}$
$x = 1 \vee x = -\frac{2}{7}$

62 **a** $3x^2 + 3 = 10x$
$3x^2 - 10x + 3 = 0$
$a = 3$, $b = -10$ en $c = 3$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$
$x = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{10 - \sqrt{64}}{6}$
$x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$

b $6x^2 + x = 2$
$6x^2 + x - 2 = 0$
$a = 6$, $b = 1$ en $c = -2$
$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -2 = 49$
$x = \frac{-1 + \sqrt{49}}{12} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{49}}{12}$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3}$

c $4x^2 + 3 = 8x$
$4x^2 - 8x + 3 = 0$
$a = 4$, $b = -8$ en $c = 3$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16$
$x = \frac{8 + \sqrt{16}}{8} \vee x = \frac{8 - \sqrt{16}}{8}$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

d $7x = 2x^2 + 5$
$-2x^2 + 7x - 5 = 0$
$a = -2$, $b = 7$ en $c = -5$
$D = 7^2 - 4 \cdot -2 \cdot -5 = 9$
$x = \frac{-7 + \sqrt{9}}{-4} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{9}}{-4}$
$x = 1 \vee x = 2\frac{1}{2}$

e $9x - 4 = 5x^2$
$-5x^2 + 9x - 4 = 0$
$a = -5$, $b = 9$ en $c = -4$
$D = 9^2 - 4 \cdot -5 \cdot -4 = 1$
$x = \frac{-9 + \sqrt{1}}{-10} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{1}}{-10}$
$x = \frac{4}{5} \vee x = 1$

f $50x^2 + 1 = 15x$
$50x^2 - 15x + 1 = 0$
$a = 50$, $b = -15$ en $c = 1$
$D = (-15)^2 - 4 \cdot 50 \cdot 1 = 25$
$x = \frac{15 + \sqrt{25}}{100} \vee x = \frac{15 - \sqrt{25}}{100}$
$x = \frac{1}{5} \vee x = \frac{1}{10}$

L11 **a** $4x^2 + 7x + 3 = 0$
$a = 4$, $b = 7$ en $c = 3$
$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1$
$x = \frac{-7 + \sqrt{1}}{8} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{1}}{8}$
$x = -\frac{3}{4} \vee x = -1$

b $3x^2 + 1 = 4x$
$3x^2 - 4x + 1 = 0$
$a = 3$, $b = -4$ en $c = 1$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$
$x = \frac{4 + \sqrt{4}}{6} \vee x = \frac{4 - \sqrt{4}}{6}$
$x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$

63 **a** $a = 5$, $b = 2$ en $c = 1$
$D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -16$
b De vergelijking heeft geen oplossing omdat $\sqrt{-16}$ niet bestaat.
c $a = 9$, $b = 6$ en $c = 1$
$D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$
d De vergelijking heeft maar één oplossing omdat $\frac{-6 + \sqrt{0}}{18}$ en $\frac{-6 - \sqrt{0}}{18}$ gelijk zijn.

Bladzijde 123

64 $D = 0$ geeft $x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$.
Dus uit de *abc*-formule met $D = 0$ volgt dat $x = \frac{-b}{2a}$.

Bladzijde 124

65 **a** $2x^2 + 4x + 1 = 0$
$a = 2$, $b = 4$ en $c = 1$
$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
$x = \frac{-4 + \sqrt{8}}{4} \vee x = \frac{-4 - \sqrt{8}}{4}$
$x \approx -0{,}29 \vee x \approx -1{,}71$
b $x^2 + x - 5 = 0$
$a = 1$, $b = 1$ en $c = -5$
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 21$
$x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$
$x \approx 1{,}79 \vee x \approx -2{,}79$
c $25x^2 + 20x + 4 = 0$
$a = 25$, $b = 20$ en $c = 4$
$D = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 0$
$x = \frac{-20}{50} = -\frac{2}{5}$
d $3x^2 = 2x + 8$
$3x^2 - 2x - 8 = 0$
$a = 3$, $b = -2$ en $c = -8$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -8 = 100$
$x = \frac{2 + \sqrt{100}}{6} \vee x = \frac{2 - \sqrt{100}}{6}$
$x = 2 \vee x = -1\frac{1}{3}$
e $2x^2 + x + 5 = 0$
$a = 2$, $b = 1$ en $c = 5$
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39$
$D < 0$, dus geen oplossing.
f $5x + 6 = 2x^2$
$-2x^2 + 5x + 6 = 0$
$a = -2$, $b = 5$ en $c = 6$
$D = 5^2 - 4 \cdot -2 \cdot 6 = 73$
$x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{-4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{73}}{-4}$
$x \approx -0{,}89 \vee x \approx 3{,}39$

66 **a** $2x^2 + 3x + 1 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = 1$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$
$x = \frac{-3 + \sqrt{1}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{1}}{4}$
$x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$
b $2x^2 + 3x = 1$
$2x^2 + 3x - 1 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = -1$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 17$
$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$
$x \approx 0{,}28 \vee x \approx -1{,}78$
c $2x^2 + 3x + 2 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = 2$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7$
$D < 0$, dus geen oplossing.
d $4x^2 + 1 = 4x$
$4x^2 - 4x + 1 = 0$
$a = 4$, $b = -4$ en $c = 1$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
e $4x(x - 7) + 45 = 0$
$4x^2 - 28x + 45 = 0$
$a = 4$, $b = -28$ en $c = 45$
$D = (-28)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 45 = 64$
$x = \frac{28 + \sqrt{64}}{8} \vee x = \frac{28 - \sqrt{64}}{8}$
$x = 4\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2}$
f $\frac{1}{3}x^2 - 6 = 2x$
$\frac{1}{3}x^2 - 2x - 6 = 0$
$x^2 - 6x - 18 = 0$
$a = 1$, $b = -6$ en $c = -18$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -18 = 108$
$x = \frac{6 + \sqrt{108}}{2} \vee x = \frac{6 - \sqrt{108}}{2}$
$x \approx 8{,}20 \vee x \approx -2{,}20$

67 $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + x + 3 = -3x + 4$

$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 - 8x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = -8$ en $c = 2$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 56$

$x = \frac{8 + \sqrt{56}}{2} \vee x = \frac{8 - \sqrt{56}}{2}$

$x = 7{,}741\ldots \vee x = 0{,}258\ldots$

$g(7{,}741\ldots) = -3 \cdot 7{,}741\ldots + 4 \approx -19{,}22$ en $g(0{,}258\ldots) = -3 \cdot 0{,}258\ldots + 4 \approx 3{,}22$.

Dus $A(0{,}26; 3{,}22)$ en $B(7{,}74; -19{,}22)$.

68 **a** $-2x^2 + 5x + c = 0$

$a = -2$, $b = 5$ en $c = c$

$D = 5^2 - 4 \cdot -2 \cdot c = 25 + 8c$

Eén oplossing, dus $D = 0$ en dit geeft $25 + 8c = 0$

$8c = -25$

$c = -3\frac{1}{8}$

b $4x^2 + bx + 25 = 0$

$a = 4$, $b = b$ en $c = 25$

$D = b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = b^2 - 400$

Eén oplossing, dus $D = 0$ en dit geeft $b^2 - 400 = 0$

$b^2 = 400$

$b = 20 \vee b = -20$

c Voor $a = 0$ krijg je de $-3x + 1 = 0$. Deze vergelijking heeft één oplossing.

Voor $a \neq 0$ krijg je

$ax^2 - 3x + 1 = 0$

$a = a$, $b = -3$ en $c = 1$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 9 - 4a$

Eén oplossing, dus $D = 0$ en dit geeft $9 - 4a = 0$

$-4a = -9$

$a = 2\frac{1}{4}$

Dus $a = 0 \vee a = 2\frac{1}{4}$.

L12 **a** $3x^2 + x - 5 = 0$

$a = 3$, $b = 1$ en $c = -5$

$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 61$

$x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{6} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{61}}{6}$

$x \approx 1{,}14 \vee x \approx -1{,}47$

b $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = 9$, $b = -12$ en $c = 4$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$

$x = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

c $2x^2 + 4x + 7 = 0$

$a = 2$, $b = 4$ en $c = 7$

$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -40$

$D < 0$, dus geen oplossing.

Bladzijde 125

69 **a** $x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = -2$ en $c = 2$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

b De vergelijking heeft nul oplossingen omdat $D < 0$.

Je kunt dat in de figuur zien omdat de grafiek van f de x-as niet snijdt.

c $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ en $c = 2$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$

d De vergelijking heeft één oplossing omdat $D = 0$.

Je kunt dat in de figuur zien omdat de grafiek van g één snijpunt met de x-as heeft.

Bladzijde 126

70

De parabool $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
De parabool heeft twee snijpunten met de x-as.	De parabool heeft één snijpunt (raakpunt) met de x-as.	De parabool heeft geen snijpunt met de x-as.

71

a $y = x^2 + 2x + 3$
$a = 1$, $b = 2$ en $c = 3$
$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.

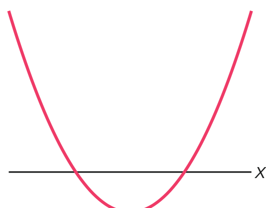
b $y = -x^2 - x + 1$
$a = -1$, $b = -1$ en $c = 1$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 1 = 5$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.

c $y = x^2 + 9x + 20$
$a = 1$, $b = 9$ en $c = 20$
$D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.

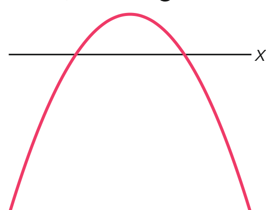
d $y = 4x^2 - 4x + 1$
$a = 4$, $b = -4$ en $c = 1$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
$D = 0$, dus één snijpunt met de x-as.

72

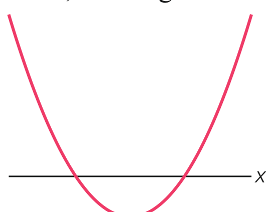
a $y = 2x^2 + 3x - 4$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = -4$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4 = 41$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



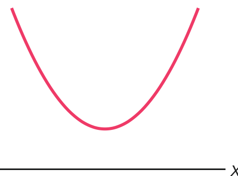
b $y = -x^2 + 6x + 1$
$a = -1$, $b = 6$ en $c = 1$
$D = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot 1 = 40$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



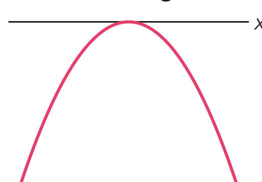
c $y = x^2 + 2x$
$a = 1$, $b = 2$ en $c = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



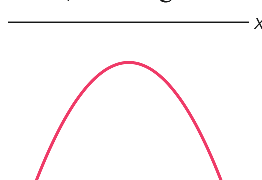
d $y = 8x^2 - x + 1$
$a = 8$, $b = -1$ en $c = 1$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = -31$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



e $y = -4x^2 + 6x - 2\frac{1}{4}$
$a = -4$, $b = 6$ en $c = -2\frac{1}{4}$
$D = 6^2 - 4 \cdot -4 \cdot -2\frac{1}{4} = 0$
$D = 0$, dus een raakpunt met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



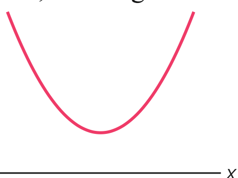
f $y = -x^2 - 2$
$a = -1$, $b = 0$ en $c = -2$
$D = 0^2 - 4 \cdot -1 \cdot -2 = -8$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



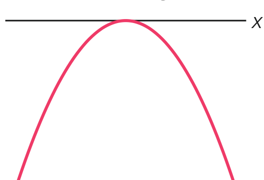
73 **a** $y = ax^2 + 6x + 2$
$a = a$, $b = 6$ en $c = 2$
$D = 6^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 36 - 8a$
De parabool raakt de x-as, dus $D = 0$ en dit geeft $36 - 8a = 0$
$-8a = -36$
$a = 4\frac{1}{2}$

b $y = 9x^2 + bx + 4$
$a = 9$, $b = b$ en $c = 4$
$D = b^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = b^2 - 144$
De parabool raakt de x-as dus $D = 0$ en dit geeft $b^2 - 144 = 0$
$b^2 = 144$
$b = 12 \vee b = -12$

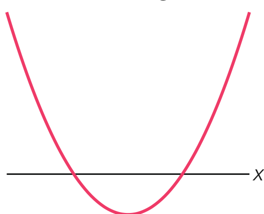
L13 **a** $y = x^2 + 4x + 5$
$a = 1$, $b = 4$ en $c = 5$
$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



b $y = -x^2 + 2x - 1$
$a = -1$, $b = 2$ en $c = -1$
$D = 2^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = 0$
$D = 0$, dus een raakpunt met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



c $y = 3x^2 + 3x - 1$
$a = 3$, $b = 3$ en $c = -1$
$D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1 = 21$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



3.6 Verschillende oplosmethoden

Bladzijde 127

74 **a** De vergelijking $x^2 - 16 = 0$ kun je oplossen door te herleiden tot de vorm $x^2 = c$.
De vergelijking $x^2 - 16x = 0$ kun je oplossen door het linkerlid te ontbinden in factoren.

b Bij het oplossen van de vergelijking $x(x - 3) = 0$ pas je direct toe dat $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
Bij het oplossen van de vergelijking $x(x - 3) = 10$ werk je eerst de haakjes weg en maak je het rechterlid nul. Vervolgens ontbind je het linkerlid in factoren met de product-som-methode.

75 **a** $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 1 = 0$
$a = \frac{2}{3}$, $b = 2$ en $c = -1$
$D = 2^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot -1 = 6\frac{2}{3}$
$x = \frac{-2 + \sqrt{6\frac{2}{3}}}{1\frac{1}{3}} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{6\frac{2}{3}}}{1\frac{1}{3}}$
$x \approx 0{,}44 \vee x \approx -3{,}44$
b Ze krijgt de vergelijking $2x^2 + 6x - 3 = 0$.
c $2x^2 + 6x - 3 = 0$
$a = 2$, $b = 6$ en $c = -3$
$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 60$
$x = \frac{-6 + \sqrt{60}}{4} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{60}}{4}$
$x \approx 0{,}44 \vee x \approx -3{,}44$
Je krijgt dezelfde oplossingen.
d *

Bladzijde 128

76 **a** $x^2 + 6x = 0$
$x(x + 6) = 0$
$x = 0 \vee x = -6$
b $x^2 + 6x = 7$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x - 1)(x + 7) = 0$
$x = 1 \vee x = -7$
c $x^2 + 6x + 7 = 0$
$a = 1$, $b = 6$ en $c = 7$
$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$
$x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2}$
$x \approx -1{,}59 \vee x \approx -4{,}41$
d $x^2 + 6 = 0$
$x^2 = -6$
geen oplossing

77 **a** $-x^2 + 3x + 1 = 0$
$x^2 - 3x - 1 = 0$
$a = 1$, $b = -3$ en $c = -1$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$
$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$
$x \approx 3{,}30 \vee x \approx -0{,}30$
b $4x^2 - 8x = 0$
$4x(x - 2) = 0$
$x = 0 \vee x = 2$
c $4x^2 + 4 = 8x$
$4x^2 - 8x + 4 = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)(x - 1) = 0$
$x = 1$
d $3x - 1 = 2x^2$
$-2x^2 + 3x - 1 = 0$
$a = -2$, $b = 3$ en $c = -1$
$D = 3^2 - 4 \cdot -2 \cdot -1 = 1$
$x = \frac{-3 + \sqrt{1}}{-4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{1}}{-4}$
$x = \frac{1}{2} \vee x = 1$
e $0{,}5x^2 + 5x = 12$
$0{,}5x^2 + 5x - 12 = 0$
$x^2 + 10x - 24 = 0$
$(x - 2)(x + 12) = 0$
$x = 2 \vee x = -12$
f $(x - 2)(x - 3) = 20$
$x^2 - 3x - 2x + 6 = 20$
$x^2 - 5x + 6 = 20$
$x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x + 2)(x - 7) = 0$
$x = -2 \vee x = 7$

78 **a** $(2x+3)^2 = 36$
$2x + 3 = 6 \vee 2x + 3 = -6$
$2x = 3 \vee 2x = -9$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -4\frac{1}{2}$

b $(7x + 8)(3x - 57) = 0$
$7x + 8 = 0 \vee 3x - 57 = 0$
$7x = -8 \vee 3x = 57$
$x = -1\frac{1}{7} \vee x = 19$

c $\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{5}x = \frac{1}{3}$
$x^2 + 3x = 5$
$x^2 + 3x - 5 = 0$
$a = 1$, $b = 3$ en $c = -5$
$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 29$
$x = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$
$x \approx 1{,}19 \vee x \approx -4{,}19$

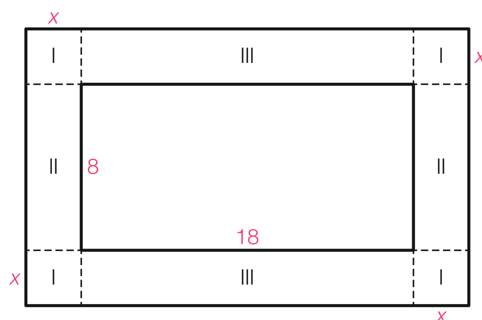
d $(x - 1)(3x + 7) = -3$
$3x^2 + 7x - 3x - 7 = -3$
$3x^2 + 4x - 7 = -3$
$3x^2 + 4x - 4 = 0$
$a = 3$, $b = 4$ en $c = -4$
$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 64$
$x = \frac{-4 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{-4 - \sqrt{64}}{6}$
$x = \frac{2}{3} \vee x = -2$

e $x(x - 1) = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}x$
$x^2 - x = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}x$
$5x^2 - 5x = 1 - 4x$
$5x^2 - x - 1 = 0$
$a = 5$, $b = -1$ en $c = -1$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -1 = 21$
$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{10} \vee x = \frac{1 - \sqrt{21}}{10}$
$x \approx 0{,}56 \vee x \approx -0{,}36$

f $(4x - 1)^2 = 2x(8x - 3)$
$(4x - 1)(4x - 1) = 16x^2 - 6x$
$16x^2 - 4x - 4x + 1 = 16x^2 - 6x$
$16x^2 - 8x + 1 = 16x^2 - 6x$
$-2x + 1 = 0$
$-2x = -1$
$x = \frac{1}{2}$

Bladzijde 129

79 **a** Zie de figuur hiernaast.

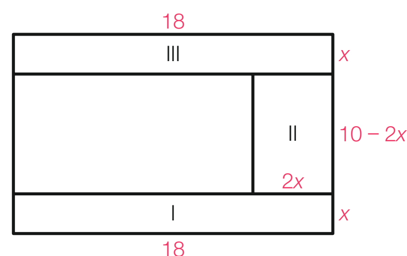


opp. tegelpad $= 4 \cdot \text{opp. I} + 2 \cdot \text{opp. II} + 2 \cdot \text{opp. III}$
$= 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 8x + 2 \cdot 18x$
$= 4x^2 + 16x + 36x$
$= 4x^2 + 52x$

b opp. zwembad $= 18 \cdot 8 = 144 \text{ m}^2$
opp. tegelpad $= \frac{5}{6} \cdot 144 = 120 \text{ m}^2$
Hieruit volgt de vergelijking $4x^2 + 52x = 120$.

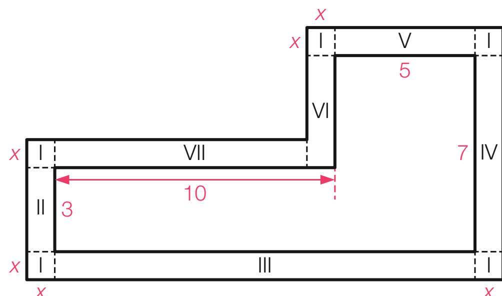
c $4x^2 + 52x = 120$
$4x^2 + 52x - 120 = 0$
$x^2 + 13x - 30 = 0$
$(x - 2)(x + 15) = 0$
$x = 2 \vee x = -15$
De oplossing $x = -15$ past niet bij de situatie, dus de breedte van het pad is 2 meter.

80 Zie de figuur hiernaast.



opp. bloemperken $= \text{opp. I} + \text{opp. II} + \text{opp. III}$
$= 18x + 2x(10 - 2x) + 18x$
$= 36x + 20x - 4x^2$
$= -4x^2 + 56x$
opp. tuin $= 10 \cdot 18 = 180 \text{ m}^2$
opp. bloemperken $= \frac{5}{12} \cdot 180 = 75 \text{ m}^2$
Dus $-4x^2 + 56x = 75$
$-4x^2 + 56x - 75 = 0$
$a = -4$, $b = 56$ en $c = -75$
$D = 56^2 - 4 \cdot -4 \cdot -75 = 1936$
$x = \frac{-56 + \sqrt{1936}}{-8} \vee x = \frac{-56 - \sqrt{1936}}{-8}$
$x = 1{,}5 \vee x = 12{,}5$
De oplossing $x = 12{,}5$ past niet bij de situatie, dus $x = 1{,}5$.
De afmetingen van het grasveld zijn $18 - 2 \cdot 1{,}5 = 15$ meter bij $10 - 2 \cdot 1{,}5 = 7$ meter.

81 Stel de breedte van het pad x meter.



$$\begin{aligned}\text{opp. tegelpad} &= 5 \cdot \text{opp. I} + \text{opp. II} + \text{opp. III} + \text{opp. IV} + \text{opp. V} + \text{opp. VI} + \text{opp. VII}\\ &= 5 \cdot x^2 + 3x + 15x + 7x + 5x + 4x + x(10 - x)\\ &= 5x^2 + 34x + 10x - x^2\\ &= 4x^2 + 44x\end{aligned}$$

opp. tegelpad = 104 m^2 geeft $4x^2 + 44x = 104$

$x^2 + 11x = 26$

$x^2 + 11x - 26 = 0$

$(x - 2)(x + 13) = 0$

$x = 2 \vee x = -13$

De oplossing $x = -13$ past niet bij de situatie, dus de breedte van het pad is 2 meter.

82 Van een rechthoekig stuk is de oppervlakte $\frac{6912}{6} = 1152$ m^2.

Stel de lengte van een rechthoekig stuk x meter en de breedte y meter.

omtrek = 576 meter geeft $x + 9y = 576$

$9y = -x + 576$

$y = -\frac{8}{9}x + 64$

opp. rechthoekig stuk = 1152 m^2 geeft $xy = 1152$

$x(-\frac{8}{9}x + 64) = 1152$

$-\frac{8}{9}x^2 + 64x = 1152$

$-\frac{8}{9}x^2 + 64x - 1152 = 0$

$-8x^2 + 576x - 10\,368 = 0$

$x^2 - 72x + 1296 = 0$

$(x - 36)(x - 36) = 0$

$x = 36$

$x = 36$ geeft $y = -\frac{8}{9} \cdot 36 + 64 = 32$

Dus de rechthoekige stukken zijn 36 bij 32 meter.

L14

a $2x^2 = 20x$

$2x^2 - 20x = 0$

$2x(x - 10) = 0$

$x = 0 \vee x = 10$

b $2x^2 = 20$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

$x \approx 3{,}16 \vee x \approx -3{,}16$

c $2x^2 + 11x + 5 = 0$

$a = 2$, $b = 11$ en $c = 5$

$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$

$x = \dfrac{-11 + \sqrt{81}}{4} \vee x = \dfrac{-11 - \sqrt{81}}{4}$

$x = -\frac{1}{2} \vee x = -5$

d $x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 1)(x + 2) = 0$

$x = -1 \vee x = -2$

e $3x^2 + 9 = 0$

$3x^2 = -9$

$x^2 = -3$

geen oplossing

f $2x^2 + 40 = 18x$

$2x^2 - 18x + 40 = 0$

$x^2 - 9x + 20 = 0$

$(x - 4)(x - 5) = 0$

$x = 4 \vee x = 5$

Gemengde opgaven

Bladzijde 130

1

a $(3x-5)(x+3)=x-9$
$3x^2+9x-5x-15=x-9$
$3x^2+4x-15=x-9$
$3x^2+3x-6=0$
$x^2+x-2=0$
$(x-1)(x+2)=0$
$x=1 \vee x=-2$

b $\frac{1}{2}(2x-3)^2-1=7$
$\frac{1}{2}(2x-3)^2=8$
$(2x-3)^2=16$
$2x-3=4 \vee 2x-3=-4$
$2x=7 \vee 2x=-1$
$x=3\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$

c $5x^2+7x=2$
$5x^2+7x-2=0$
$a=5$, $b=7$ en $c=-2$
$D=7^2-4\cdot 5\cdot -2=89$
$x=\frac{-7+\sqrt{89}}{10} \vee x=\frac{-7-\sqrt{89}}{10}$
$x\approx 0{,}24 \vee x\approx -1{,}64$

d $3(x+4)^2+8=5$
$3(x+4)^2=-3$
$(x+4)^2=-1$
geen oplossing

e $\frac{1}{3}x^2-2x=9$
$\frac{1}{3}x^2-2x-9=0$
$x^2-6x-27=0$
$(x+3)(x-9)=0$
$x=-3 \vee x=9$

f $10(5x-3)(2x+1)=0$
$5x-3=0 \vee 2x+1=0$
$5x=3 \vee 2x=-1$
$x=\frac{3}{5} \vee x=-\frac{1}{2}$

g $x(x-5)-70=x^2$
$x^2-5x-70=x^2$
$-5x=70$
$x=-14$

h $\frac{1}{4}x(x-\frac{1}{2})=1$
$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x=1$
$2x^2-x=8$
$2x^2-x-8=0$
$a=2$, $b=-1$ en $c=-8$
$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot -8=65$
$x=\frac{1+\sqrt{65}}{4} \vee x=\frac{1-\sqrt{65}}{4}$
$x\approx 2{,}27 \vee x\approx -1{,}77$

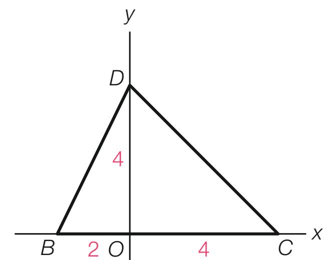
i $8x^2+169=8x(13-x)$
$8x^2+169=104x-8x^2$
$16x^2-104x+169=0$
$a=16$, $b=-104$ en $c=169$
$D=(-104)^2-4\cdot 16\cdot 169=0$
$x=\frac{104}{32}=3\frac{1}{4}$

2

a $f(-6)=-\frac{1}{2}\cdot(-6)^2+-6+4=-20$
$g(12)=12+2=14$

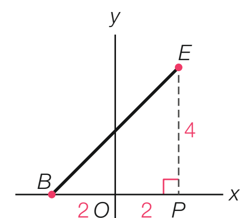
b $f(-8)=-\frac{1}{2}\cdot(-8)^2+-8+4=-36$
Dus A ligt op de grafiek van f.

c $f(x)=0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2+x+4=0$
$x^2-2x-8=0$
$(x+2)(x-4)=0$
$x=-2 \vee x=4$
Dus $B(-2, 0)$ en $C(4, 0)$.
$f(0)=-0+0+4=4$, dus $D(0, 4)$.
Zie de figuur hiernaast.
opp. $\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$



d $f(7)=-\frac{1}{2}\cdot 7^2+7+4=-13\frac{1}{2}$, dus $H(7, -13\frac{1}{2})$.
$g(7)=7+2=9$, dus $I(7, 9)$.
Dus $HI=y_I-y_H=9--13\frac{1}{2}=22\frac{1}{2}$.

e $f(x)=g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2+x+4=x+2$
$-\frac{1}{2}x^2+2=0$
$x^2-4=0$
$x^2=4$
$x=2 \vee x=-2$
$g(2)=2+2=4$ en $g(-2)=-2+2=0$
Dus de grafieken snijden elkaar in de punten $B(-2, 0)$ en $E(2, 4)$.
Zie de figuur hiernaast.
$\angle P=90°$, dus $BE^2=BP^2+EP^2$
$BE^2=4^2+4^2=32$
$BE=\sqrt{32}\approx 5{,}7$
Dus de afstand tussen deze punten is ongeveer 5,7.



3 $a = 1$ en $b = 8$, dus $x_{top} = -\frac{8}{2 \cdot 1} = -4$.

$y_{top} = f(-4) = (-4)^2 + 8 \cdot -4 - 17 = -33$

Dus de top is het punt $(-4, -33)$. Hieruit volgt $g(x) = a(x + 4)^2 - 33$.

Door $A(-6, 3)$, dus $a(-6 + 4)^2 - 33 = 3$

$a(-2)^2 - 33 = 3$

$4a - 33 = 3$

$4a = 36$

$a = 9$

$g(x) = 9(x + 4)^2 - 33$

$= 9(x + 4)(x + 4) - 33$

$= 9(x^2 + 4x + 4x + 16) - 33$

$= 9(x^2 + 8x + 16) - 33$

$= 9x^2 + 72x + 144 - 33$

$= 9x^2 + 72x + 111$

4 **a** $d = 2{,}8$ en $e = 8{,}2$, dus de snijpunten met de x-as zijn $(2{,}8;\ 0)$ en $(8{,}2;\ 0)$.

Dus de breedte van de tunnel is $8{,}2 - 2{,}8 = 5{,}4$ meter.

$x_{top} = \frac{2{,}8 + 8{,}2}{2} = 5{,}5$ geeft $h_{top} = -0{,}381(5{,}5 - 2{,}8)(5{,}5 - 8{,}2) = 2{,}77749$

Dus de hoogte van de tunnel is ongeveer 2,8 meter.

b De camper is 2 meter breed en rijdt door het midden van de tunnel, dus bereken de hoogte van de tunnel voor $x = 5{,}5 - 1 = 4{,}5$.

$x = 4{,}5$ geeft $h = -0{,}381(4{,}5 - 2{,}8)(4{,}5 - 8{,}2) = 2{,}39649$

$2{,}35 < 2{,}39649$, dus de camper past door de tunnel.

5 **a** $a = 1$ en $b = 10$, dus $x_{top} = -\frac{10}{2 \cdot 1} = -5$.

$y_{top} = (-5)^2 + 10 \cdot -5 + 15 = -10$

Dus de top is het punt $(-5, -10)$.

b De top is het punt $(-6, -15)$.

c $a = \frac{1}{2}$ en $b = -1$, dus $x_{top} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$.

$y_{top} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - 2 = -2\frac{1}{2}$

Dus de top is het punt $(1, -2\frac{1}{2})$.

d De top is het punt $(0, 12)$.

e $y = 4 - (x + 1)^2 = -(x + 1)^2 + 4$

Dus de top is het punt $(-1, 4)$.

f $d = -2$ en $e = 12$, dus $x_{top} = \frac{-2 + 12}{2} = 5$.

$y_{top} = \frac{1}{7}(5 + 2)(5 - 12) = -7$

Dus de top is het punt $(5, -7)$.

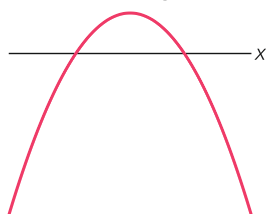
6 **a** $y = -3x^2 - 2x + 1$

$a = -3$, $b = -2$ en $c = 1$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 1 = 16$

$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.

$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



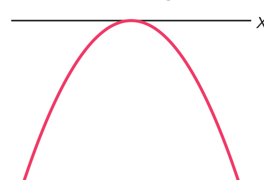
b $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 36$

$a = -\frac{1}{4}$, $b = 6$ en $c = -36$

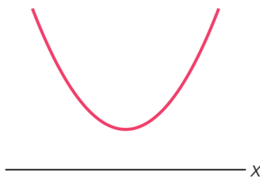
$D = 6^2 - 4 \cdot -\frac{1}{4} \cdot -36 = 0$

$D = 0$, dus een raakpunt met de x-as.

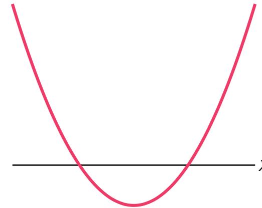
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



c $y = 5 + (x + 3)^2 = (x + 3)^2 + 5$
De top is het punt (−3, 5).
$a = 1$, dus $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



d $y = -\frac{1}{2}(x - 3)(5 - x) = \frac{1}{2}(x - 3)(-5 + x)$
$= \frac{1}{2}(x - 3)(x - 5)$
$d = 3$ en $e = 5$, dus $x_{top} = \frac{3 + 5}{2} = 4$.
$y_{top} = f(4) = \frac{1}{2}(4 - 3)(4 - 5) = -\frac{1}{2}$
Dus de top is het punt $(4, -\frac{1}{2})$.
$a = \frac{1}{2}$, dus $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.

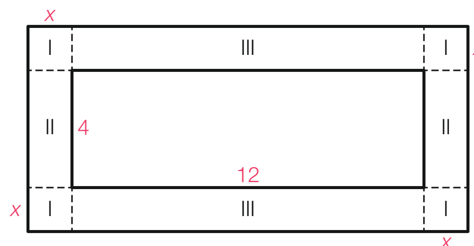


Bladzijde 131

7 **a** $x = 0$ geeft $h = -0{,}2(0 - 3{,}2)^2 + 4{,}048 = 2$
Dus op 2 meter hoogte laat Ellie de bal los.
b De top is het punt (3,2; 4,048).
Dus de maximale hoogte van de bal is 4,048 meter.
c 450 cm = 4,5 m
$x = 4{,}5$ geeft $h = -0{,}2(4{,}5 - 3{,}2)^2 + 4{,}048 = 3{,}71$
Dus ze laat de bal op meer dan 450 cm van de korfbalpaal los.

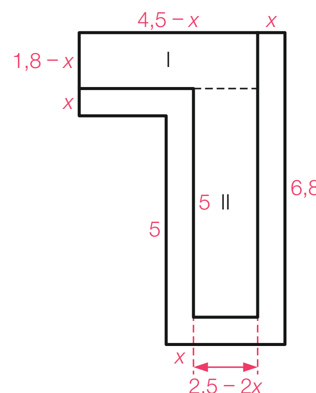
8 **a** Door (−6, 0) en (2, 0), dus $y = a(x + 6)(x - 2)$.
Door (0, 5), dus $a(0 + 6)(0 - 2) = 5$
$a \cdot 6 \cdot -2 = 5$
$-12a = 5$
$a = -\frac{5}{12}$
Dus $y = -\frac{5}{12}(x + 6)(x - 2)$.
$d = -6$ en $e = 2$, dus $x_{top} = \frac{-6 + 2}{2} = -2$.
$y_{top} = -\frac{5}{12}(-2 + 6)(-2 - 2) = 6\frac{2}{3}$
Dus de top is het punt $(-2, 6\frac{2}{3})$.
b Top (−5, −2), dus $y = a(x + 5)^2 - 2$.
Door (0, 5), dus $a(0 + 5)^2 - 2 = 5$
$a \cdot 5^2 - 2 = 5$
$25a - 2 = 5$
$25a = 7$
$a = \frac{7}{25}$
$y = \frac{7}{25}(x + 5)^2 - 2$
$= \frac{7}{25}(x + 5)(x + 5) - 2$
$= \frac{7}{25}(x^2 + 5x + 5x + 25) - 2$
$= \frac{7}{25}(x^2 + 10x + 25) - 2$
$= \frac{7}{25}x^2 + 2\frac{4}{5}x + 7 - 2$
$= \frac{7}{25}x^2 + 2\frac{4}{5}x + 5$
Dus $a = \frac{7}{25}$, $b = 2\frac{4}{5}$ en $c = 5$.

9 Zie de figuur hiernaast.



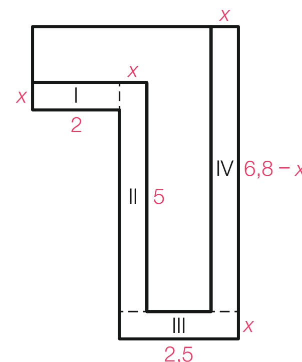
opp. tegelpad = 4 · opp. I + 2 · opp. II + 2 · opp. III
$= 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 4x + 2 \cdot 12x$
$= 4x^2 + 8x + 24x$
$= 4x^2 + 32x$
opp. tegelpad = 80 m², dus $4x^2 + 32x = 80$
$4x^2 + 32x - 80 = 0$
$x^2 + 8x - 20 = 0$
$(x - 2)(x + 10) = 0$
$x = 2 \vee x = -10$
De oplossing $x = -10$ past niet bij de situatie, dus het pad is 2 meter breed.

10 Zie de figuur hiernaast.



opp. vloer = opp. I + opp. II
$= (1{,}8 - x)(4{,}5 - x) + 5(2{,}5 - 2x)$
$= 8{,}1 - 1{,}8x - 4{,}5x + x^2 + 12{,}5 - 10x$
$= x^2 - 16{,}3x + 20{,}6$
opp. vloer = 8,2 m², dus $x^2 - 16{,}3x + 20{,}6 = 8{,}2$
$x^2 - 16{,}3x + 12{,}4 = 0$
$a = 1$, $b = -16{,}3$ en $c = 12{,}4$
$D = (-16{,}3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12{,}4 = 216{,}09$
$$x = \frac{16{,}3 + \sqrt{216{,}09}}{2} \vee x = \frac{16{,}3 - \sqrt{216{,}09}}{2}$$
$x = 15{,}5 \vee x = 0{,}8$
De oplossing $x = 15{,}5$ past niet bij de situatie, dus de bar is 0,8 meter breed.

Alternatieve uitwerking
opp. keuken = $4{,}5 \cdot 6{,}8 - (4{,}5 - 2{,}5) \cdot (6{,}8 - 1{,}8) = 20{,}6$ m²
opp. bar = opp. keuken − opp. vloer = $20{,}6 - 8{,}2 = 12{,}4$ m²
Zie de figuur hiernaast.



opp. bar = opp. I + opp. II + opp. III + opp. IV
$= 2x + 5x + 2{,}5x + x(6{,}8 - x)$
$= 9{,}5x + 6{,}8x - x^2$
$= 16{,}3x - x^2$
opp. bar = 12,4 m², dus $16{,}3x - x^2 = 12{,}4$
$-x^2 + 16{,}3x - 12{,}4 = 0$
$a = -1$, $b = 16{,}3$ en $c = -12{,}4$
$D = 16{,}3^2 - 4 \cdot -1 \cdot -12{,}4 = 216{,}09$
$$x = \frac{-16{,}3 + \sqrt{216{,}09}}{-2} \vee x = \frac{-16{,}3 - \sqrt{216{,}09}}{-2}$$
$x = 0{,}8 \vee x = 15{,}5$
De oplossing $x = 15{,}5$ past niet bij de situatie, dus de bar is 0,8 meter breed.

11 **a** $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4 \xrightarrow{\text{5 naar links, 3 omlaag}} g(x) = -\frac{1}{4}(x + 5 - 2)^2 + 4 - 3$,
dus $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1$.

b Door de grafiek van k met 3 naar links en 4 omlaag te schuiven, valt deze samen met de grafiek van h.
$k(x) = 1{,}2(x - 3)^2 + 2{,}7 \xrightarrow{\text{3 naar links, 4 omlaag}} h(x) = 1{,}2(x + 3 - 3)^2 + 2{,}7 - 4$,
dus $h(x) = 1{,}2x^2 - 1{,}3$.

12 De grafiek van g gaat door $P(2, 0)$ en $Q(6, 0)$, dus $g(x) = a(x - 2)(x - 6)$.
Als we het punt $A(-6, 10)$, dat op de grafiek van f ligt, met 6 naar rechts en 4 omlaag schuiven, krijgen we het punt (0, 6). Dit punt ligt op de grafiek van g.
De grafiek van g door (0, 6) geeft $a(0 - 2)(0 - 6) = 6$
$a \cdot -2 \cdot -6 = 6$
$12a = 6$
$a = \frac{1}{2}$

Dus $g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 6)$.

$d = 2$ en $e = 6$, dus voor de top van de grafiek van g geldt $x_{top} = \frac{2 + 6}{2} = 4$.

Dit geeft $y_{top} = g(4) = \frac{1}{2}(4 - 2)(4 - 6) = -2$.
Dus de top van de grafiek van g is het punt $(4, -2)$.
Als we de top van de grafiek van g met 6 naar links en 4 omhoog schuiven, krijgen we de top T van de grafiek van f. Dus $T(-2, 2)$.

Diagnostische toets

Bladzijde 134

1 **a** $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$
$x^2 - 4x - 32 = 0$
$(x + 4)(x - 8) = 0$
$x = -4 \lor x = 8$

b $-x^2 + 5x - 6 = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 2)(x - 3) = 0$
$x = 2 \lor x = 3$

c $(x - 6)(2x - 6) = 20x$
$2x^2 - 6x - 12x + 36 = 20x$
$2x^2 - 18x + 36 = 20x$
$2x^2 - 38x + 36 = 0$
$x^2 - 19x + 18 = 0$
$(x - 1)(x - 18) = 0$
$x = 1 \lor x = 18$

2 **a** $-(x - 6)^2 + 100 = 0$
$-(x - 6)^2 = -100$
$(x - 6)^2 = 100$
$x - 6 = 10 \lor x - 6 = -10$
$x = 16 \lor x = -4$

b $2(x + 5)^2 + 8 = 20$
$2(x + 5)^2 = 12$
$(x + 5)^2 = 6$
$x + 5 = \sqrt{6} \lor x + 5 = -\sqrt{6}$
$x = -5 + \sqrt{6} \lor x = -5 - \sqrt{6}$
$x \approx -2{,}55 \lor x \approx -7{,}45$

c $3(x + 25)^2 = -75$
$(x + 25)^2 = -25$
geen oplossing

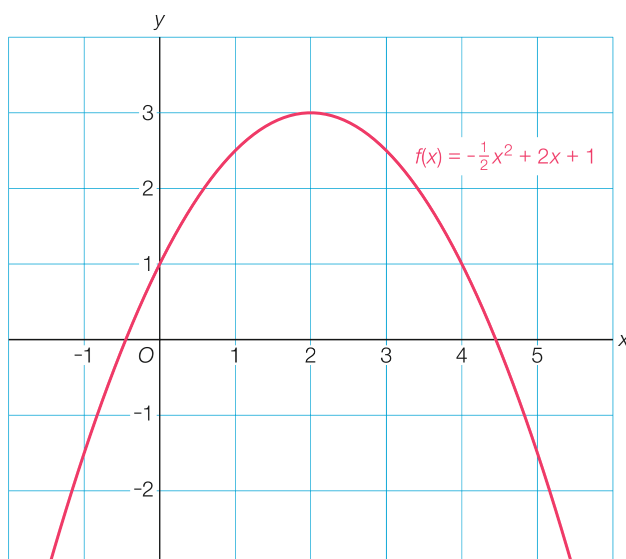
3 **a** $f(10) = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = -29$
$f(-8) = -\frac{1}{2} \cdot (-8)^2 + 2 \cdot -8 + 1 = -47$

b $f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot -2 + 1 = -5$, dus A ligt op de grafiek van f.

c $y_P = f(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 = -5$

d $f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot -1 + 1 = -1\frac{1}{2}$
$f(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = -1\frac{1}{2}$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-1\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	1	$-1\frac{1}{2}$



4 **a** $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 20 = 0$

$x^2 + 6x - 40 = 0$

$(x - 4)(x + 10) = 0$

$x = 4 \vee x = -10$

Dus $A(-10, 0)$ en $B(4, 0)$.

$f(0) = -0 - 0 + 20 = 20$, dus $C(0, 20)$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 20 = 2x + 28$

$-\frac{1}{2}x^2 - 5x - 8 = 0$

$x^2 + 10x + 16 = 0$

$(x + 2)(x + 8) = 0$

$x = -2 \vee x = -8$

$g(-8) = 2 \cdot -8 + 28 = 12$, dus $P(-8, 12)$.

$g(-2) = 2 \cdot -2 + 28 = 24$, dus $Q(-2, 24)$.

5 **a** $a = 2$ en $b = -12$, dus $x_{top} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3$.

$y_{top} = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 1 = -17$

Dus de top is het punt $(3, -17)$.

b $a = -0{,}1$ en $b = 2$, dus $x_{top} = -\frac{2}{2 \cdot -0{,}1} = 10$.

$y_{top} = g(10) = -0{,}1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 - 8 = 2$

Dus de top is het punt $(10, 2)$.

6 $a = -0{,}6$ en $b = 21{,}6$, dus $p_{top} = -\frac{21{,}6}{2 \cdot -0{,}6} = 18$.

$p_{top} = 18$ geeft $W_{top} = -0{,}6 \cdot 18^2 + 21{,}6 \cdot 18 - 25 = 169{,}4$

Dus de maximale winst is 169,40 euro.

7 **a** $d = 2{,}4$ en $e = 9{,}2$, dus $A(2{,}4; 0)$ en $B(9{,}2; 0)$.

Dus de breedte van de tunnel is $9{,}2 - 2{,}4 = 6{,}8$ meter.

$x_{top} = \frac{2{,}4 + 9{,}2}{2} = 5{,}8$ geeft $h_{top} = -0{,}25(5{,}8 - 2{,}4)(5{,}8 - 9{,}2) = 2{,}89$

Dus de hoogte van de tunnel is 2,89 meter.

b $x = 9{,}2 - 1{,}8 = 7{,}4$ geeft $h = -0{,}25(7{,}4 - 2{,}4)(7{,}4 - 9{,}2) = 2{,}25$, dus $CD = 2{,}25$ meter.

De oppervlakte van de scheidingswand is $12 \cdot 2{,}25 = 27$ m^2.

8 Door $A(-4, 0)$ en $B(8, 0)$, dus $y = a(x + 4)(x - 8)$.

Door $C(6, 30)$, dus $a(6 + 4)(6 - 8) = 30$

$a \cdot 10 \cdot -2 = 30$

$-20a = 30$

$a = -1\frac{1}{2}$

Dus $y = -1\frac{1}{2}(x + 4)(x - 8)$.

Dit geeft $y = -1\frac{1}{2}(x + 4)(x - 8)$

$= -1\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4x - 32)$

$= -1\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 32)$

$= -1\frac{1}{2}x^2 + 6x + 48$

Bladzijde 135

9 **a** $y = -2x^2 + 3 \xrightarrow{\text{2 omlaag}} y = -2x^2 + 3 - 2$, dus $y = -2x^2 + 1$.

b $y = -2x^2 + 3 \xrightarrow{\text{7 naar rechts}} y = -2(x - 7)^2 + 3$

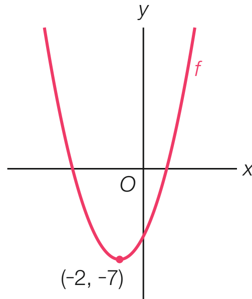
c $y = -2x^2 + 3 \xrightarrow{\text{1 naar links, 8 omhoog}} y = -2(x + 1)^2 + 3 + 8$, dus $y = -2(x + 1)^2 + 11$.

d $y = -2x^2 + 3 \xrightarrow{\text{4 naar rechts, 3 omlaag}} y = -2(x - 4)^2 + 3 - 3$, dus $y = -2(x - 4)^2$.

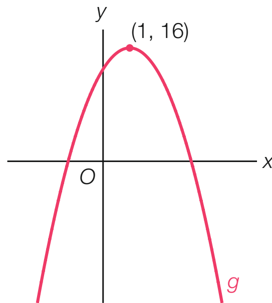
10 **a** Door de grafiek van f één naar links en vijf omlaag te schuiven, krijg je de grafiek van g.

b Door de grafiek van h drie naar rechts en zeven omlaag te schuiven, krijg je de grafiek van k.

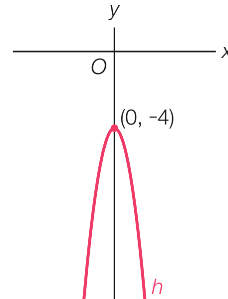
11 **a** $a = 5$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt $(-2, -7)$.



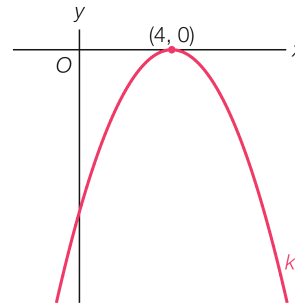
b $a = -3$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(1, 16)$.



c $a = -6$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(0, -4)$.



d $a = -6$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt $(4, 0)$.



12 Top $T(-3, 8)$, dus $y = a(x + 3)^2 + 8$.
Door $A(1, -20)$, dus $a(1 + 3)^2 + 8 = -20$

$$a \cdot 4^2 + 8 = -20$$
$$16a + 8 = -20$$
$$16a = -28$$
$$a = -1\tfrac{3}{4}$$

Dus $y = -1\tfrac{3}{4}(x + 3)^2 + 8$

$$= -1\tfrac{3}{4}(x + 3)(x + 3) + 8$$
$$= -1\tfrac{3}{4}(x^2 + 3x + 3x + 9) + 8$$
$$= -1\tfrac{3}{4}(x^2 + 6x + 9) + 8$$
$$= -1\tfrac{3}{4}x^2 - 10\tfrac{1}{2}x - 15\tfrac{3}{4} + 8$$
$$= -1\tfrac{3}{4}x^2 - 10\tfrac{1}{2}x - 7\tfrac{3}{4}$$

13 **a** $2x^2 + 3x - 20 = 0$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = -20$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{169}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{169}}{4}$$

$x = 2\tfrac{1}{2} \vee x = -4$

b $8x^2 + 14x = 15$
$8x^2 + 14x - 15 = 0$
$a = 8$, $b = 14$ en $c = -15$
$D = 14^2 - 4 \cdot 8 \cdot -15 = 676$

$$x = \frac{-14 + \sqrt{676}}{16} \vee x = \frac{-14 - \sqrt{676}}{16}$$

$x = \tfrac{3}{4} \vee x = -2\tfrac{1}{2}$

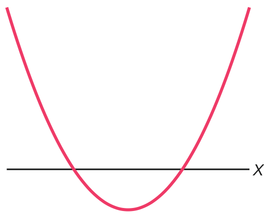
c $6x = 7x^2 + 1$
$-7x^2 + 6x - 1 = 0$
$a = -7$, $b = 6$ en $c = -1$
$D = 6^2 - 4 \cdot -7 \cdot -1 = 8$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{-14} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{-14}$$

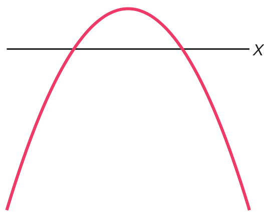
$x \approx 0{,}23 \vee x \approx 0{,}63$

d $5x = 7x^2 + 1$
$-7x^2 + 5x - 1 = 0$
$a = -7$, $b = 5$ en $c = -1$
$D = 5^2 - 4 \cdot -7 \cdot -1 = -3$
$D < 0$, dus geen oplossing.

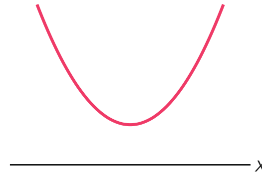
14 **a** $y = 3x^2 + 4x + 1$
$a = 3$, $b = 4$ en $c = 1$
$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



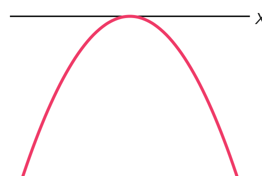
b $y = -4x^2 + 3x + 1$
$a = -4$, $b = 3$ en $c = 1$
$D = 3^2 - 4 \cdot -4 \cdot 1 = 25$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



c $y = x^2 + 3x + 4$
$a = 1$, $b = 3$ en $c = 4$
$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



d $y = -2x^2 + 4x - 2$
$a = -2$, $b = 4$ en $c = -2$
$D = 4^2 - 4 \cdot -2 \cdot -2 = 0$
$D = 0$, dus een raakpunt met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



15 **a** $\frac{1}{3}x^2 = 10$
$x^2 = 30$
$x = \sqrt{30} \vee x = -\sqrt{30}$
$x \approx 5{,}48 \vee x \approx -5{,}48$

b $(x + 10)(x + 9) = 16$
$x^2 + 9x + 10x + 90 = 16$
$x^2 + 19x + 90 = 16$
$x^2 + 19x + 74 = 0$
$a = 1$, $b = 19$ en $c = 74$
$D = 19^2 - 4 \cdot 1 \cdot 74 = 65$
$x = \dfrac{-19 + \sqrt{65}}{2} \vee x = \dfrac{-19 - \sqrt{65}}{2}$
$x \approx -5{,}47 \vee x \approx -13{,}53$

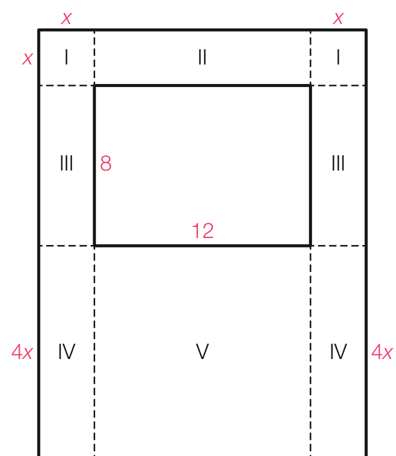
c $64x^2 + 9 = 48x$
$64x^2 - 48x + 9 = 0$
$a = 64$, $b = -48$ en $c = 9$
$D = (-48)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 9 = 0$
$x = \dfrac{48}{128} = \dfrac{3}{8}$

d $(x + 10)^2 = 16$
$x + 10 = 4 \vee x + 10 = -4$
$x = -6 \vee x = -14$

e $\frac{1}{3}x^2 + x = 6$
$x^2 + 3x = 18$
$x^2 + 3x - 18 = 0$
$(x - 3)(x + 6) = 0$
$x = 3 \vee x = -6$

f $(2x - 5)^2 - 1 = x(x + 8)$
$(2x - 5)(2x - 5) - 1 = x^2 + 8x$
$4x^2 - 10x - 10x + 25 - 1 = x^2 + 8x$
$4x^2 - 20x + 24 = x^2 + 8x$
$3x^2 - 28x + 24 = 0$
$a = 3$, $b = -28$ en $c = 24$
$D = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 496$
$x = \dfrac{28 + \sqrt{496}}{6} \vee x = \dfrac{28 - \sqrt{496}}{6}$
$x \approx 8{,}38 \vee x \approx 0{,}95$

16 Zie de figuur hiernaast.
opp. pad en terras
= 2 · opp. I + opp. II + 2 · opp. III + 2 · opp. IV + opp. V
$= 2 \cdot x^2 + 12x + 2 \cdot 8x + 2 \cdot 4x^2 + 48x$
$= 2x^2 + 12x + 16x + 8x^2 + 48x$
$= 10x^2 + 76x$
opp. pad en terras = 192 m², dus $10x^2 + 76x = 192$
$10x^2 + 76x - 192 = 0$
$5x^2 + 38x - 96 = 0$
$a = 5$, $b = 38$ en $c = -96$
$D = 38^2 - 4 \cdot 5 \cdot -96 = 3364$
$x = \dfrac{-38 + \sqrt{3364}}{10} \vee x = \dfrac{-38 - \sqrt{3364}}{10}$
$x = 2 \vee x = -9{,}6$
De oplossing $x = -9{,}6$ past niet bij de situatie, dus de breedte van het pad is 2 meter.



Herhaling

Bladzijde 136

1 **a** $\frac{1}{4}x^2 - x - 8 = 0$
$x^2 - 4x - 32 = 0$
$(x + 4)(x - 8) = 0$
$x = -4 \vee x = 8$

b $2x^2 + 6x = 8$
$2x^2 + 6x - 8 = 0$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x - 1)(x + 4) = 0$
$x = 1 \vee x = -4$

c $-x^2 = 9x + 18$
$-x^2 - 9x - 18 = 0$
$x^2 + 9x + 18 = 0$
$(x + 3)(x + 6) = 0$
$x = -3 \vee x = -6$

d $5x^2 - 30 = 5x$
$5x^2 - 5x - 30 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$

2 **a** $(x + 3)^2 = 81$
$x + 3 = 9 \vee x + 3 = -9$
$x = 6 \vee x = -12$

b $(x - 2)^2 + 7 = 3$
$(x - 2)^2 = -4$
geen oplossing

c $-4(x - 9)^2 = 0$
$(x - 9)^2 = 0$
$x - 9 = 0$
$x = 9$

d $0{,}5(x + 7)^2 + 6 = 11$
$0{,}5(x + 7)^2 = 5$
$(x + 7)^2 = 10$
$x + 7 = \sqrt{10} \vee x + 7 = -\sqrt{10}$
$x = -7 + \sqrt{10} \vee x = -7 - \sqrt{10}$
$x \approx -3{,}84 \vee x \approx -10{,}16$

3 **a** $f(-4) = -2 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot -4 + 1 = -63$
$f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 1 = 7$
$f(5) = -2 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 + 1 = -9$

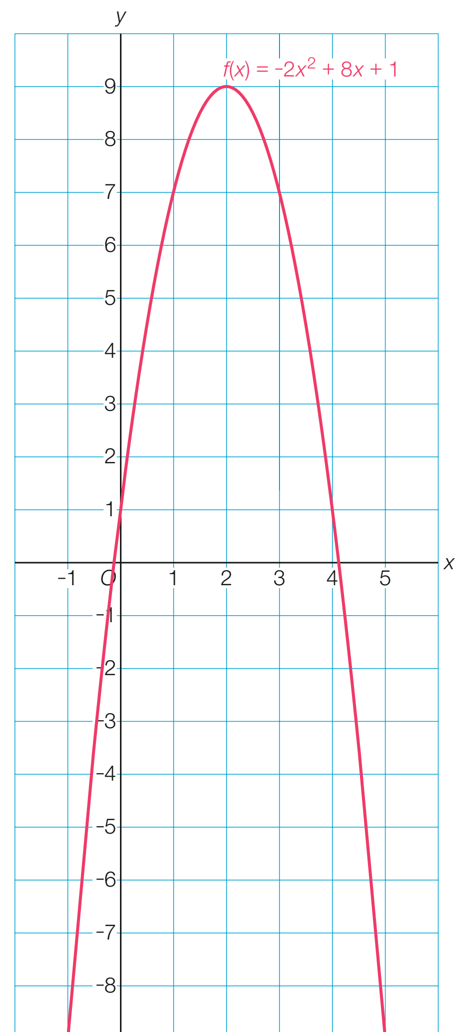
b $f(4) = -2 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 + 1 = 1$
Dus A ligt op de grafiek van f.

c $f(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$, dus $f(0) = f(4)$.
$x_{top} = \frac{0 + 4}{2} = 2$

d

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-9	1	7	9	7	1	-9

Zie de figuur hiernaast.



4 **a** $-\frac{1}{2}x^2 + x + 12 = 0$
$x^2 - 2x - 24 = 0$
$(x + 4)(x - 6) = 0$
$x = -4 \vee x = 6$
Dus $A(-4, 0)$ en $B(6, 0)$.

b $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 + 12 = 12$
Dus $C(0, 12)$.

c $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + x + 12 = x + 10$
$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = 2 \vee x = -2$
Dus $x_P = -2$ en $x_Q = 2$.

d $y_P = g(-2) = -2 + 10 = 8$
$y_Q = g(2) = 2 + 10 = 12$

Bladzijde 137

5 **a** $a = 2$ en $b = -12$, dus $x_{top} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3$.
$y_{top} = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 - 8 = -26$
Dus de top is het punt (3, −26).

b $a = -0{,}3$ en $b = 6$, dus $x_{top} = -\frac{6}{2 \cdot -0{,}3} = 10$.
$y_{top} = g(10) = -0{,}3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 - 5{,}2 = 24{,}8$
Dus de top is het punt (10; 24,8).

c $a = -0{,}1$ en $b = 11$, dus $x_{top} = -\frac{11}{2 \cdot -0{,}1} = 55$.
$y_{top} = h(55) = -0{,}1 \cdot 55^2 + 11 \cdot 55 = 302{,}5$
Dus de top is het punt (55; 302,5).

d $a = 18$ en $b = 9$, dus $x_{top} = -\frac{9}{2 \cdot 18} = -0{,}25$.
$y_{top} = k(-0{,}25) = 18 \cdot (-0{,}25)^2 + 9 \cdot -0{,}25 - 16 = -17{,}125$
Dus de top is het punt (−0,25; −17,125).

6 **a** $a = -2$ en $b = 36$, dus $p_{top} = -\frac{36}{2 \cdot -2} = 9$.
Bij een prijs van 9 euro per T-shirt is de winst maximaal.

b $W_{top} = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 10 = 152$
Dus de maximale winst is 152 euro.

7 **a** $d = 6$ en $e = -8$, dus de snijpunten met de x-as zijn (6, 0) en (−8, 0).
$x_{top} = \frac{6 + -8}{2} = -1$ geeft $y_{top} = f(-1) = 5(-1 - 6)(-1 + 8) = -245$
Dus de top is het punt (−1, −245).

b $d = -3$ en $e = -15$, dus de snijpunten met de x-as zijn (−3, 0) en (−15, 0).
$x_{top} = \frac{-3 + -15}{2} = -9$ geeft $y_{top} = g(-9) = -(-9 + 3)(-9 + 15) = 36$
Dus de top is het punt (−9, 36).

c $d = 6$ en $e = -20$, dus de snijpunten met de x-as zijn (6, 0) en (−20, 0).
$x_{top} = \frac{6 + -20}{2} = -7$ geeft $y_{top} = h(-7) = -\frac{1}{8}(-7 - 6)(-7 + 20) = 21\frac{1}{8}$
Dus de top is het punt $(-7, 21\frac{1}{8})$.

d $d = 0$ en $e = 15$, dus de snijpunten met de x-as zijn (0, 0) en (15, 0).
$x_{top} = \frac{0 + 15}{2} = 7\frac{1}{2}$ geeft $y_{top} = k(7\frac{1}{2}) = 8 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot (7\frac{1}{2} - 15) = -450$
Dus de top is het punt $(7\frac{1}{2}, -450)$.

8 **a** $x_A = -10{,}8$ en $x_B = -3{,}4$.
Dus de tunnel is $-3{,}4 - -10{,}8 = -3{,}4 + 10{,}8 = 7{,}4$ meter breed.

b $x_{top} = \frac{-3{,}4 + -10{,}8}{2} = -7{,}1$ geeft $h_{top} = -0{,}2(-7{,}1 + 10{,}8)(-7{,}1 + 3{,}4) = 2{,}738$
Dus de tunnel is 2,738 meter hoog.

c $x_C = -3{,}4 - 1{,}4 = -4{,}8$ geeft $h = -0{,}2(-4{,}8 + 10{,}8)(-4{,}8 + 3{,}4) = 1{,}68$
Dus $CD = 1{,}68$ meter.

d De oppervlakte van de scheidingswand is $10 \cdot 1{,}68 = 16{,}8$ m^2.

Bladzijde 138

9 **a** $a(1 + 3)(1 - 7) = 12$
$a \cdot 4 \cdot -6 = 12$
$-24a = 12$
$a = -\frac{1}{2}$
Dus $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

b Door (−3, 0) en (7, 0), dus $y = a(x + 3)(x - 7)$.
Door (3, −48) geeft $a(3 + 3)(3 - 7) = -48$

$$a \cdot 6 \cdot -4 = -48$$
$$-24a = -48$$
$$a = 2$$

Dus $y = 2(x + 3)(x - 7)$.

c Door (−1, 0) en (3, 0), dus $y = a(x + 1)(x - 3)$.
Door (0, 5) geeft $a(0 + 1)(0 - 3) = 5$

$$a \cdot 1 \cdot -3 = 5$$
$$-3a = 5$$
$$a = -1\tfrac{2}{3}$$

Dus $y = -1\tfrac{2}{3}(x + 1)(x - 3)$.

10 **a** $y = 3(x + 6)(x - 8)$
$y = 3(x^2 - 8x + 6x - 48)$
$y = 3(x^2 - 2x - 48)$
$y = 3x^2 - 6x - 144$

b $y = -\frac{1}{4}(x - 4)(x - 20)$
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 20x - 4x + 80)$
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 24x + 80)$
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 20$

c $y = -8x(x - 3)$
$y = -8x^2 + 24x$

d $y = -(x - 1)(x + 12)$
$y = -(x^2 + 12x - x - 12)$
$y = -(x^2 + 11x - 12)$
$y = -x^2 - 11x + 12$

11 **a** $y = 5x^2 - 7 \xrightarrow{\text{6 omlaag}} y = 5x^2 - 7 - 6$, dus $y = 5x^2 - 13$.

b $y = 5x^2 - 7 \xrightarrow{\text{17 naar rechts}} y = 5(x - 17)^2 - 7$

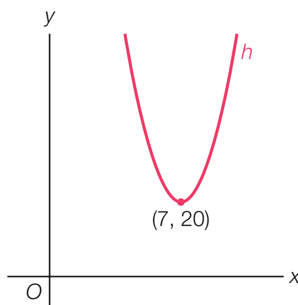
c $y = 5x^2 - 7 \xrightarrow{\text{3 naar links, 4 omlaag}} y = 5(x + 3)^2 - 7 - 4$, dus $y = 5(x + 3)^2 - 11$.

d $y = 5x^2 - 7 \xrightarrow{\text{2 omhoog, 5 naar rechts}} y = 5(x - 5)^2 - 7 + 2$, dus $y = 5(x - 5)^2 - 5$.

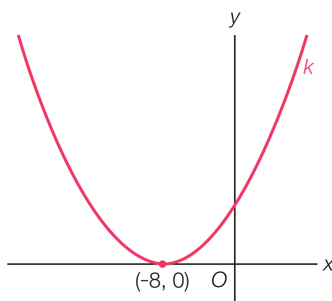
12 **a** Door de grafiek van *f* negen naar links en vier omlaag te schuiven, krijg je de grafiek van *g*.

b Door de grafiek van *h* vijf naar rechts en elf omhoog te schuiven, krijg je de grafiek van *k*.

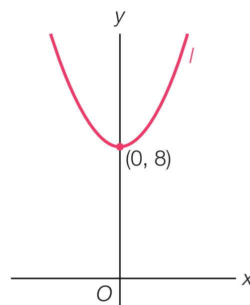
13 **a** $a = 5$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt (7, 20).



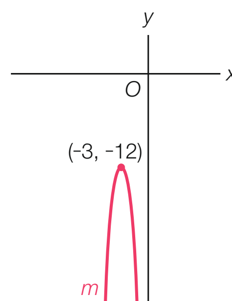
b $a = 0{,}1$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt (−8, 0).



c $a = 0{,}1$, dus $a > 0$, dus dalparabool.
De top is het punt (0, 8).



d $a = -6$, dus $a < 0$, dus bergparabool.
De top is het punt (−3, −12).



Bladzijde 139

14 **a** $a(1+2)^2-6=12$
$a \cdot 3^2-6=12$
$9a-6=12$
$9a=18$
$a=2$
Dus $y=2(x+2)^2-6$.

b Top (-2, -6), dus $y=a(x+2)^2-6$.
Door (-4, 16), dus $a(-4+2)^2-6=16$
$a \cdot (-2)^2-6=16$
$4a-6=16$
$4a=22$
$a=5\frac{1}{2}$
Dus $y=5\frac{1}{2}(x+2)^2-6$.

c Top (3, 12), dus $y=a(x-3)^2+12$.
Door (0, -24), dus $a(0-3)^2+12=-24$
$a \cdot (-3)^2+12=-24$
$9a+12=-24$
$9a=-36$
$a=-4$
Dus $y=-4(x-3)^2+12$.

d Top (-5, 0), dus $y=a(x+5)^2$.
Door (-1, 48), dus $a(-1+5)^2=48$
$a \cdot 4^2=48$
$16a=48$
$a=3$
Dus $y=3(x+5)^2$.

15 **a** $y=-(x+2)^2+3$
$y=-(x+2)(x+2)+3$
$y=-(x^2+2x+2x+4)+3$
$y=-(x^2+4x+4)+3$
$y=-x^2-4x-4+3$
$y=-x^2-4x-1$

b $y=5(x-3)^2-8$
$y=5(x-3)(x-3)-8$
$y=5(x^2-3x-3x+9)-8$
$y=5(x^2-6x+9)-8$
$y=5x^2-30x+45-8$
$y=5x^2-30x+37$

c $y=(x+1)^2-5$
$y=(x+1)(x+1)-5$
$y=x^2+x+x+1-5$
$y=x^2+2x-4$

d $y=-\frac{1}{2}(x+10)^2+45$
$y=-\frac{1}{2}(x+10)(x+10)+45$
$y=-\frac{1}{2}(x^2+10x+10x+100)+45$
$y=-\frac{1}{2}(x^2+20x+100)+45$
$y=-\frac{1}{2}x^2-10x-50+45$
$y=-\frac{1}{2}x^2-10x-5$

16 **a** $2x^2+5x-12=0$
$a=2$, $b=5$ en $c=-12$
$D=5^2-4 \cdot 2 \cdot -12=121$
$x=\frac{-5+\sqrt{121}}{4} \vee x=\frac{-5-\sqrt{121}}{4}$
$x=1\frac{1}{2} \vee x=-4$

b $2x^2+5x=42$
$2x^2+5x-42=0$
$a=2$, $b=5$ en $c=-42$
$D=5^2-4 \cdot 2 \cdot -42=361$
$x=\frac{-5+\sqrt{361}}{4} \vee x=\frac{-5-\sqrt{361}}{4}$
$x=3\frac{1}{2} \vee x=-6$

c $7x=12x^2+1$
$-12x^2+7x-1=0$
$a=-12$, $b=7$ en $c=-1$
$D=7^2-4 \cdot -12 \cdot -1=1$
$x=\frac{-7+\sqrt{1}}{-24} \vee x=\frac{-7-\sqrt{1}}{-24}$
$x=\frac{1}{4} \vee x=\frac{1}{3}$

d $10x^2+99x=10$
$10x^2+99x-10=0$
$a=10$, $b=99$ en $c=-10$
$D=99^2-4 \cdot 10 \cdot -10=10\,201$
$x=\frac{-99+\sqrt{10\,201}}{20} \vee x=\frac{-99-\sqrt{10\,201}}{20}$
$x=\frac{1}{10} \vee x=-10$

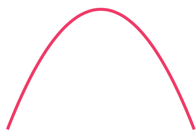
17 **a** $2x^2+7x+6=0$
$a=2$, $b=7$ en $c=6$
$D=7^2-4 \cdot 2 \cdot 6=1$
$x=\frac{-7+\sqrt{1}}{4} \vee x=\frac{-7-\sqrt{1}}{4}$
$x=-1\frac{1}{2} \vee x=-2$

b $2x^2+7x=6$
$2x^2+7x-6=0$
$a=2$, $b=7$ en $c=-6$
$D=7^2-4 \cdot 2 \cdot -6=97$
$x=\frac{-7+\sqrt{97}}{4} \vee x=\frac{-7-\sqrt{97}}{4}$
$x \approx 0{,}71 \vee x \approx -4{,}21$

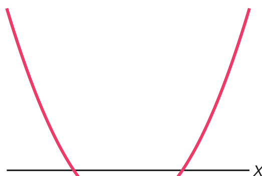
c $2x^2 + 7x + 7 = 0$
$a = 2$, $b = 7$ en $c = 7$
$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -7$
$D < 0$, dus geen oplossing.

d $20x = 4x^2 + 25$
$-4x^2 + 20x - 25 = 0$
$a = -4$, $b = 20$ en $c = -25$
$D = 20^2 - 4 \cdot -4 \cdot -25 = 0$
$x = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$

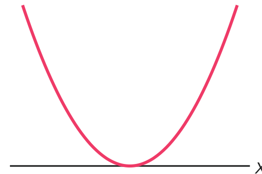
18 **a** $y = -4x^2 + 20x - 28$
$a = -4$, $b = 20$ en $c = -28$
$D = 20^2 - 4 \cdot -4 \cdot -28 = -48$
$D < 0$, dus geen snijpunt met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



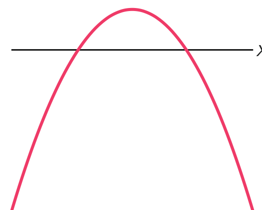
b $y = 4x^2 - 20x + 1$
$a = 4$, $b = -20$ en $c = 1$
$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 384$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



c $y = 4x^2 - 20x + 25$
$a = 4$, $b = -20$ en $c = 25$
$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$
$D = 0$, dus een raakpunt met de x-as.
$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



d $y = -4x^2 + 20x - 24$
$a = -4$, $b = 20$ en $c = -24$
$D = 20^2 - 4 \cdot -4 \cdot -24 = 16$
$D > 0$, dus twee snijpunten met de x-as.
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



19 **a** $\frac{1}{4}x^2 = 5$
$x^2 = 20$
$x = \sqrt{20} \vee x = -\sqrt{20}$
$x \approx 4{,}47 \vee x \approx -4{,}47$

b $\frac{1}{4}x^2 + x = 3$
$x^2 + 4x = 12$
$x^2 + 4x - 12 = 0$
$(x - 2)(x + 6) = 0$
$x = 2 \vee x = -6$

c $(x + 2)^2 = 9$
$x + 2 = 3 \vee x + 2 = -3$
$x = 1 \vee x = -5$

d $(x + 2)(x + 3) = 9$
$x^2 + 3x + 2x + 6 = 9$
$x^2 + 5x + 6 = 9$
$x^2 + 5x - 3 = 0$
$a = 1$, $b = 5$ en $c = -3$
$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 37$
$x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$
$x \approx 0{,}54 \vee x \approx -5{,}54$

e $\frac{1}{4}x^2 + x = 1$
$x^2 + 4x = 4$
$x^2 + 4x - 4 = 0$
$a = 1$, $b = 4$ en $c = -4$
$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 32$
$x = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2} \vee x = \frac{-4 - \sqrt{32}}{2}$
$x \approx 0{,}83 \vee x \approx -4{,}83$

f $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x + 2)(x + 2) = 0$
$x = -2$

g $x(x + 2) = 0$
$x = 0 \vee x = -2$

h $x(x + 2) = 9$
$x^2 + 2x = 9$
$x^2 + 2x - 9 = 0$
$a = 1$, $b = 2$ en $c = -9$
$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 40$
$x = \frac{-2 + \sqrt{40}}{2} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{40}}{2}$
$x \approx 2{,}16 \vee x \approx -4{,}16$

i $x(x + 2) = 3x^2$
$x^2 + 2x = 3x^2$
$-2x^2 + 2x = 0$
$-2x(x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x = 1$

20 **a** opp. III = $36x$, opp. IV = $3x^2$ en opp. V = $24x$

b opp. terras = opp. I + opp. II + opp. III + opp. IV + opp. V
$= 24x + 3x^2 + 36x + 3x^2 + 24x$
$= 6x^2 + 84x$

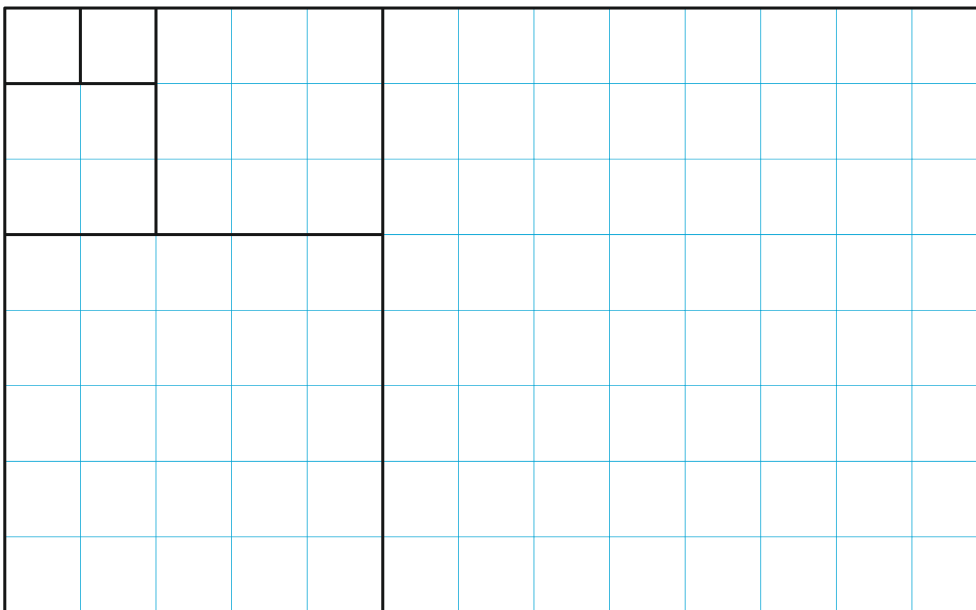
c Je kunt de vergelijking $6x^2 + 84x = 432$ opstellen.
$6x^2 + 84x = 432$
$x^2 + 14x = 72$
$x^2 + 14x - 72 = 0$
$(x - 4)(x + 18) = 0$
$x = 4 \lor x = -18$

d De oplossing $x = -18$ past niet bij de situatie, dus $x = 4$.
De breedte van het terras aan de korte zijde van het zwembad is $3x = 3 \cdot 4 = 12$ meter.

Onderzoek **Het gulden getal**

Bladzijde 141

1 **a**, **b**, **c**, **d**



e

rechthoek	lange zijde	korte zijde	$\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1,5
4	5	3	1,667
5	8	5	1,6
6	13	8	1,625
7	21	13	1,615
8	34	21	1,619
9	55	34	1,618
10	89	55	1,618

f Op den duur krijg je weer dezelfde verhouding $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$.

Bladzijde 142

2 Neem bijvoorbeeld $A = 3$.

$B = \frac{1}{3} + 1 = 1{,}333\ldots$

$C = \frac{1}{1{,}333\ldots} + 1 = 1{,}75$

$D = \frac{1}{1{,}75} + 1 = 1{,}571\ldots$

$E = \frac{1}{1{,}571\ldots} + 1 = 1{,}636\ldots$

$F = \frac{1}{1{,}636\ldots} + 1 = 1{,}611\ldots$

$G = \frac{1}{1{,}611\ldots} + 1 = 1{,}620\ldots$

$H = \frac{1}{1{,}620\ldots} + 1 = 1{,}617\ldots$

$I = \frac{1}{1{,}617\ldots} + 1 \approx 1{,}618$

Met welk getal je ook begint, je krijgt dezelfde benadering van φ als in opgave 1.

3 Neem bijvoorbeeld $A = 4$.

$B = \sqrt{4 + 1} = 2{,}236\ldots$

$C = \sqrt{2{,}236\ldots + 1} = 1{,}798\ldots$

$D = \sqrt{1{,}798\ldots + 1} = 1{,}672\ldots$

$E = \sqrt{1{,}672\ldots + 1} = 1{,}634\ldots$

$F = \sqrt{1{,}634\ldots + 1} = 1{,}623\ldots$

$G = \sqrt{1{,}623\ldots + 1} = 1{,}619\ldots$

$H = \sqrt{1{,}619\ldots + 1} = 1{,}618\ldots$

$I = \sqrt{1{,}618\ldots + 1} \approx 1{,}618$

Met welk getal je ook begint, je krijgt dezelfde benadering van φ als in opgave 1.

4 $\varphi^2 \approx 1{,}618^2 \approx 2{,}618$ en $\frac{1}{\varphi} \approx \frac{1}{1{,}618} \approx 0{,}618$

Op grond van deze uitkomsten kun je vermoeden dat $\varphi^2 = \varphi + 1$ en $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

5 **a** Uit de gelijkvormigheid volgt de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline DE & EF \end{array}$ en dit geeft $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline x+1 & x \end{array}$.

b $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline x+1 & x \end{array}$ geeft $x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$a = 1$, $b = -1$ en $c = -1$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ is negatief, dus past niet bij de situatie. Dus $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Omdat $\varphi = \frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}} = x$ is dus $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

c Als geldt dat $\varphi^2 = \varphi + 1$, dan geldt ook dat $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$ berekenen geeft als uitkomst 0, dus $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Als geldt dat $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, dan geldt ook dat $\frac{1}{\varphi} - \varphi + 1 = 0$.

$\frac{2}{1 + \sqrt{5}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1$ berekenen geeft als uitkomst 0, dus $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

6 **a** $\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (2\varphi + 1) = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2$

$\varphi^5 = \varphi \cdot \varphi^4 = \varphi \cdot (3\varphi + 2) = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3(\varphi + 1) + 2\varphi = 5\varphi + 3$

$\varphi^6 = \varphi \cdot \varphi^5 = \varphi \cdot (5\varphi + 3) = 5\varphi^2 + 3\varphi = 5(\varphi + 1) + 3\varphi = 8\varphi + 5$

b $\varphi^7 = 13\varphi + 8$ en $\varphi^8 = 21\varphi + 13$

7 **a** Deel bij $\varphi^2 = \varphi + 1$ linker- en rechterlid door φ. Dit geeft $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

Hieruit volgt $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, oftewel $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

b $\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} = \varphi + 1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = \varphi + 1 + (\varphi - 1)^2 = \varphi + 1 + (\varphi - 1)(\varphi - 1) =$

$\varphi + 1 + \varphi^2 - \varphi - \varphi + 1 = \varphi + 1 + \varphi + 1 - \varphi - \varphi + 1 = 3$

Bladzijde 143

8 Stel $BC = 1$ en $AC = x$. Dan is $AB = x + 1$.

Dus $\dfrac{AC}{BC} \Big| \dfrac{AB}{AC}$ geeft $\dfrac{x}{1} \Big| \dfrac{x+1}{x}$ oftewel $x^2 = x + 1$.

In opgave 5 heb je gezien dat hieruit volgt dat $x = \varphi$.

Dus $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{x}{1} = \dfrac{\varphi}{1} = \varphi$ en $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{\varphi+1}{\varphi} = \dfrac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$.

9 **a** *

b Zie de figuur in het leerboek.

$AB = 2$, dus $BD = DE = 1$.

$\angle B = 90°$, dus $AD^2 = AB^2 + BD^2$

$AD^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$AD = \sqrt{5}$

$AC = AE = AD - DE = \sqrt{5} - 1$

$BC = AB - AC = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 2 - \sqrt{5} + 1 = 3 - \sqrt{5}$

Als de verhoudingen $\dfrac{AC}{BC}$ en $\dfrac{AB}{AC}$ gelijk zijn, dan is lijnstuk AB volgens de gulden snede verdeeld.

$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = 1{,}618\ldots$ en $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618\ldots$

Dus $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$ en dus is lijnstuk AB met deze constructie volgens de gulden snede verdeeld.

c *

10 **a**, **b** *

11 *

4 Procenten en statistiek

Voorkennis Procenten en grote getallen

Bladzijde 146

1 **a** 32% van 720 is $0{,}32 \cdot 720 = 230{,}4$.
b 3,1% van 180 is $0{,}031 \cdot 180 = 5{,}58$.
c 0,08% van 5000 is $0{,}0008 \cdot 5000 = 4$.
d 91,8% van 528 000 is $0{,}918 \cdot 528\,000 = 484\,704$.

2 **a** 92 van 305 is $\frac{92}{305} \cdot 100\% \approx 30{,}2\%$.
b 1,8 van 3,9 is $\frac{1{,}8}{3{,}9} \cdot 100\% \approx 46{,}2\%$.
c 0,3 van 17 is $\frac{0{,}3}{17} \cdot 100\% \approx 1{,}8\%$.
d 832 van 21 000 is $\frac{832}{21\,000} \cdot 100\% \approx 4{,}0\%$.

3 **a** nieuwe ledenaantal $= 1{,}11 \cdot 36 \approx 40$
b nieuwe prijs $= 1{,}063 \cdot 5{,}60 \approx 5{,}95$ euro
c nieuwe prijs $= 0{,}765 \cdot 13{,}95 \approx 10{,}67$ euro

Bladzijde 147

4 **a** $8530 \cdot 72{,}8$ miljoen $= 620\,984$ miljoen ≈ 621 miljard
b $\frac{7{,}6 \text{ miljard}}{8275} = \frac{7\,600\,000\,000}{8275} \approx 918\,000$
c 85 miljard : 17 miljoen = 85 000 miljoen : 17 miljoen = 5000
d $\frac{8570 \text{ miljard}}{18{,}2 \text{ miljoen}} = \frac{8\,570\,000 \text{ miljoen}}{18{,}2 \text{ miljoen}} \approx 471\,000$

5 **a** De oppervlakte van het water is $0{,}71 \cdot 510$ miljoen ≈ 362 miljoen km^2.
b 7,98 miljard = 7980 miljoen
$\frac{750}{7980} \cdot 100\% \approx 9{,}4\%$ van de wereldbevolking woont in Europa.
c Er is $510 - 362{,}1$ (zie a) $= 147{,}9$ miljoen km^2 land.
$\frac{147{,}9 \text{ miljoen}}{7{,}98 \text{ miljard}} = \frac{147{,}9 \text{ miljoen}}{7980 \text{ miljoen}} = 0{,}0185\ldots$ km^2 land per persoon
Dus per persoon is er gemiddeld $0{,}0185\ldots \cdot 10^6 \approx 19\,000$ m^2 land op aarde.

4.1 Rekenen met procenten

Bladzijde 148

1 **a** De toename van de prijs is $1{,}20 - 0{,}80 = 0{,}40$ euro.
b De procentuele toename van de prijs is $\frac{0{,}40}{0{,}80} \cdot 100\% = 50\%$.

2 **a** $\frac{1569 - 1480}{1480} \cdot 100\% \approx 6{,}0\%$
Het totale aantal leerlingen is met 6,0% toegenomen.
b Voor de zomervakantie zaten er $1480 - 828 = 652$ leerlingen in de bovenbouw.
Na de zomervakantie zaten er $1569 - 1012 = 557$ leerlingen in de bovenbouw.
$\frac{557 - 652}{652} \cdot 100\% \approx -14{,}6\%$
Dus het aantal bovenbouwleerlingen is met 14,6% afgenomen.

Bladzijde 149

3 **a** $\frac{190 - 180}{180} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$
De contributie is met 5,6% toegenomen.
b $\frac{300 - 315}{315} \cdot 100\% \approx -4{,}8\%$
De relatieve afname van het aantal leden is 4,8%.
c In 2022 was de totale contributie $315 \cdot 180 = 56\,700$ euro.
In 2023 was de totale contributie $300 \cdot 190 = 57\,000$ euro.
De totale contributie is toegenomen met $\frac{57\,000 - 56\,700}{56\,700} \cdot 100\% \approx 0{,}5\%$.

4 **a** Je kunt niet spreken van oud en nieuw omdat er geen sprake is van een oude en een nieuwe situatie, maar van een vergelijking tussen twee groepen.
b $\frac{150 - 200}{200} \cdot 100\% = -25\%$
Er zitten 25% procent minder leerlingen op het vwo dan op de havo.
c $\frac{200 - 150}{150} \cdot 100\% \approx 33{,}3\%$
Er zitten 33,3% procent meer leerlingen op de havo dan op het vwo.
d $\frac{350 - 150}{150} \cdot 100\% \approx 133{,}3\%$
Het aantal leerlingen op het vmbo is 133,3% meer dan het aantal leerlingen op het vwo.

5 **a** $\frac{5{,}5 - 3{,}7}{3{,}7} \cdot 100\% \approx 48{,}6\%$
Er waren 48,6% meer middelbaaropgeleiden dan laagopgeleiden.
b $\frac{4{,}1 - (3{,}7 + 5{,}5)}{3{,}7 + 5{,}5} \cdot 100\% \approx -55{,}4\%$
Er waren 55,4% minder hoogopgeleiden dan niet-hoogopgeleiden.

6 Emma heeft 50% meer vragen goed dan fout, dus 1,5 keer zoveel goed dan fout.
Er geldt dus dat goed : fout = 1,5 : 1 = 3 : 2.
Dus Emma heeft $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$ vragen goed.
Bobbie heeft 50% minder vragen fout dan goed, dus 0,5 keer zoveel fout dan goed.
Er geldt dus dat fout : goed = 0,5 : 1 = 1 : 2.
Dus Bobbie heeft $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ vragen goed.
Dus Bobbie heeft meer vragen goed.
Het scheelt $20 - 18 = 2$ vragen.

Bladzijde 150

L1 **a** $\frac{15 - 12}{12} \cdot 100\% = 25\%$
De procentuele toename is 25%.
b $\frac{40 - 45}{45} \cdot 100\% \approx -11{,}1\%$
De procentuele afname is 11,1%.
c $\frac{15 - 13}{13} \cdot 100\% \approx 15{,}4\%$
Er zitten 15,4% meer meisjes dan jongens in 3C.

7 **a** nieuwe hoeveelheid $= 1{,}38 \cdot 5000 = 6900$
$\frac{6900 - 5000}{5000} \cdot 100\% = 38\%$
Hierbij hoort een procentuele toename van 38%.
b nieuwe hoeveelheid $= 0{,}82 \cdot 5000 = 4100$
$\frac{4100 - 5000}{5000} \cdot 100\% = -18\%$
Hierbij hoort een procentuele afname van 18%.

Bladzijde 151

8

procentuele verandering	15%	4,3%	−51%	−6,3%	21,8%	2,7%	−5,4%	−65%
vermenigvuldigingsfactor	1,15	1,043	0,49	0,937	1,218	1,027	0,946	0,35

9 **a** Bij de periode 2013-2023 hoort de factor $1{,}183 \cdot 1{,}336 = 1{,}5804\ldots$
Dus de procentuele toename is 58,0%.
b Bij de periode 2015-2022 hoort de factor $0{,}917 \cdot 1{,}426 = 1{,}3076\ldots$
Dus de procentuele toename is 30,8%.

10 Bij de periode 2012-2021 hoort de factor $0{,}943 \cdot 0{,}968 \cdot 0{,}959 = 0{,}8753\ldots$
Dus het aantal winkels in Nederland is in de periode 2012-2021 met 12,5% afgenomen.

Bladzijde 152

11 **a** Bij de periode 2018-2021 hoort de factor $1{,}057 \cdot 0{,}399 \cdot 1{,}063 = 0{,}4483\ldots$
Dus de procentuele afname is 55,2%.
b In 2021 reisden Nederlanders $0{,}4483\ldots \cdot 22{,}8 = 10{,}22\ldots$ miljard km met de trein.
Hiervan was $0{,}258 \cdot 10{,}22\ldots \approx 2{,}6$ miljard km woon-werkverkeer.

12 Bij de periode 2005-2015 hoort de factor 1,139.
$$\frac{1\,178\,000 - 1\,227\,000}{1\,227\,000} \cdot 100\% = -3{,}99\ldots\%$$
Bij de periode 2015-2020 hoort de factor $0{,}9600\ldots$
Bij de periode 2005-2020 hoort de factor $1{,}139 \cdot 0{,}9600\ldots = 1{,}0935\ldots$
Dus in de periode 2005-2020 is de procentuele toename 9,4%.

13 Bij een afname van 99% hoort de factor 0,01.
Bij een toename van 99% hoort de factor 1,99.
Door te proberen krijg je
$1{,}99^6 \cdot 0{,}01 = 0{,}6210\ldots$
$1{,}99^7 \cdot 0{,}01 = 1{,}2358\ldots$
Dus er zijn minstens 7 toenames van 99% nodig om een afname van 99% ongedaan te maken.

L2 **a** Bij de periode 2000-2020 hoort de factor $0{,}738 \cdot 1{,}557 = 1{,}1490\ldots$
Dus de procentuele toename is 14,9%.
b In 2020 verhuisden er $1{,}1490\ldots \cdot 61\,100 \approx 70\,200$ mensen uit de Randstad.

14 Marnix krijgt nieuwe aantal $= 1{,}5 \cdot 30 = 45$.
Rachida krijgt nieuwe aantal $= 1{,}5 \cdot 40 = 60$.
Dus Rachida heeft gelijk.

Bladzijde 153

15 **a** De oude prijs is $\frac{43}{1{,}075} = 40$ euro.
b De oude prijs is $\frac{1470}{0{,}84} = 1750$ euro.

Bladzijde 154

16 **a** In 2020 werd $\frac{8{,}8}{0{,}967} \approx 9{,}1$ miljard kg huishoudelijk afval ingezameld.
b In 2021 werd $0{,}191 \cdot 8{,}8 = 1{,}6808$ miljard kg gft-afval ingezameld.
In 1997 werd $\frac{1{,}6808}{0{,}989} \approx 1{,}7$ miljard kg gft-afval ingezameld.

17 **a** In 2000 gingen Nederlanders in totaal $\frac{35{,}5}{1{,}164} \approx 30{,}5$ miljoen keer op vakantie.
b In 2016 brachten Nederlanders $1{,}060 \cdot 16{,}6 = 17{,}596$ miljoen keer een vakantie in eigen land door.
Dus in 2016 gingen Nederlanders $35{,}5 - 17{,}596 \approx 17{,}9$ miljoen keer op vakantie naar het buitenland.

c In 2017 gingen Nederlanders $\frac{28{,}7}{0{,}806} = 35{,}60\ldots$ miljoen keer op vakantie.

$\frac{35{,}60\ldots - 35{,}5}{35{,}5} \cdot 100\% \approx 0{,}3\%$

Dus in de periode 2016-2017 is de procentuele toename 0,3%.

18 **a** In 2020 gingen Nederlanders $0{,}831 \cdot 25{,}6 = 21{,}2736$ miljoen keer op vakantie met de auto en $25{,}6 - 21{,}2736 = 4{,}3264$ miljoen keer met het vliegtuig.

In 2017 gingen Nederlanders $\frac{21{,}2736}{0{,}791} = 26{,}89\ldots$ miljoen keer op vakantie met de auto en $\frac{4{,}3264}{0{,}429} = 10{,}08\ldots$ miljoen keer met het vliegtuig.

In 2017 was $\frac{26{,}89\ldots}{26{,}89\ldots + 10{,}08\ldots} \cdot 100\% \approx 72{,}7\%$ van de auto- en vliegvakanties met de auto.

b $\frac{25{,}6 - (26{,}89\ldots + 10{,}08\ldots)}{26{,}89\ldots + 10{,}08\ldots} \cdot 100\% \approx -30{,}8\%$

Het aantal auto- en vliegvakanties nam in de periode 2017-2020 af met 30,8%.

L3 **a** Vorig jaar zaten er $\frac{740}{1{,}131} \approx 654$ leerlingen op het Goois College.

b Vorig jaar kregen de derdeklassers $\frac{960}{0{,}975} \approx 985$ uur les.

Bladzijde 155

19 **a** Dat zijn $0{,}23 \cdot 180 \approx 41$ leerlingen.

b $0{,}16 \times \text{totaal} = 140$, dus totaal $= \frac{140}{0{,}16}$.

c In totaal zitten er $\frac{140}{0{,}16} = 875$ leerlingen op het Curie Lyceum.

Bladzijde 156

20 **a** In totaal waren er $\frac{147}{0{,}405} \approx 363$ vertrekkende vluchten.

b De oude huurprijs was $\frac{15{,}30}{0{,}034} = 450$ euro per maand.

De nieuwe huurprijs is $450 + 15{,}30 = 465{,}30$ euro per maand.

21 **a** In Nederland ligt $\frac{2653}{0{,}421} = 6301{,}6\ldots$ km vaarweg.

In Noord-Holland ligt $0{,}135 \cdot 6301{,}6\ldots \approx 851$ km vaarweg.

b In Limburg ligt $\frac{104}{0{,}418} = 248{,}8\ldots$ km vaarweg.

De lengte van de vaarwegen in Zuid-Nederland is $\frac{248{,}8\ldots}{0{,}318} \approx 782$ km.

22 Het aantal elektrische auto's in 2020 was $\frac{174\,000}{1{,}632} \approx 106\,618$.

Het totale aantal auto's in 2020 was $\frac{106\,618}{0{,}0123} \approx 8\,668\,130$.

Het totale aantal auto's in 2021 was $\frac{174\,000}{0{,}0198} \approx 8\,787\,879$.

$\frac{8\,787\,879 - 8\,668\,130}{8\,668\,130} \cdot 100\% \approx 1{,}4\%$

Dus het totale aantal auto's is in de periode 2020-2021 met 1,4% toegenomen.

23 13% van de inwoners van Oostenrijk woont in Stiermarken, maar niet in Graz.
Dit komt overeen met $100\% - 35\% = 65\%$ van de inwoners van Stiermarken.
De overige 35% van de inwoners van Stiermarken die in Graz woont, komt dus overeen met $13 : 65 \cdot 35 = 7\%$ van de inwoners van Oostenrijk.
Dus $13\% + 7\% = 20\%$ van de inwoners van Oostenrijk woont in Stiermarken.

Alternatieve uitwerking
Stel dat x% van de inwoners van Oostenrijk in Graz woont.
Dan woont 13% + x% in Stiermarken.
Voor Graz geldt $x = 0{,}35(13 + x)$
$x = 4{,}55 + 0{,}35x$
$0{,}65x = 4{,}55$
$x = 7$
Dus 13% + 7% = 20% van de inwoners van Oostenrijk woont in Stiermarken.

L4 Zeya krijgt $\frac{48}{0{,}75} = 64$ euro zakgeld.

4.2 Informatieverwerking

Bladzijde 157

24 **a** OPKOMST SCHOLIERENVERKIEZINGEN

jaar	1977	1998	2021
aantal stemmen (× 1000)	220	130	50

b $\frac{50\,000 - 220\,000}{220\,000} \cdot 100\% \approx -77{,}3\%$
Dus in 2021 werden er 77,3% minder stemmen uitgebracht dan in 1977.

c In 1998 hebben gemiddeld $\frac{130\,000}{410} \approx 317$ leerlingen per school hun stem uitgebracht.

Bladzijde 158

25 **a** OMZET VEGAN- EN VEGAPRODUCTEN EN VLEES IN MILJOENEN EURO'S

	vleesvervangers	vegan- en vegaproducten	vlees
2018	95	197	3380
2020	174	296	3480

b Het gevraagde percentage is $\frac{95}{197} \cdot 100\% \approx 48{,}2\%$.

c In 2018 gaf een Nederlander gemiddeld $\frac{197 \text{ miljoen}}{17{,}2 \text{ miljoen}} \approx 11{,}45$ euro uit aan vegan- of vegaproducten.

Bladzijde 159

26 **a** AANTAL INWONERS (× 1000)

	Nederland	Amsterdam	Rotterdam
in totaal	17 640	882	653
met twee ouders in Nederland geboren	13 240	379	307
met ten minste één ouder in het buitenland geboren	4400	503	346

b Het gevraagde percentage is $\frac{13\,240}{17\,640} \cdot 100\% \approx 75{,}1\%$.

c Het gevraagde percentage is $\frac{503 + 346}{4400} \cdot 100\% \approx 19{,}3\%$.

d Van de inwoners van Nederland woont 74% in een stad, en van deze stadsbewoners woont 19% in een van de vier grootste steden. Dus $0{,}19 \cdot 74\% = 14{,}06\%$ van de inwoners van Nederland woont in een van de vier grootste steden.
Dus $100\% - 14{,}06\% \approx 85{,}9\%$ van de inwoners van Nederland woont niet in een van de vier grootste steden.

27 **a** STUDENTEN AAN DE UVA

	2017	2022
totaal	31 000	41 000
Nederlandse studenten	26 700	28 100
buitenlandse studenten	4300	12 900

b EERSTEJAARS STUDENTEN AAN DE UVA

	2017	2022
totaal	6300	8100
Nederlandse studenten	4800	4900
buitenlandse studenten	1500	3200

Bladzijde 160

L5 **a** ENERGIEPRODUCTIE IN NEDERLAND IN MILJARDEN KWH

	2020	2021
uit zonnestroom	9	11
uit hernieuwbare bronnen	84	96
totale energieproductie	818	846

b $\frac{846 - 818}{818} \cdot 100\% \approx 3{,}4\%$

De procentuele toename is 3,4%.

28 **a** In 2017 was het gemiddeld aantal stemmen per school $\frac{140\,775}{470} \approx 300$.

b In de eerste rij kun je het aantal scholen berekenen door het aantal stemmen te delen door het gemiddelde aantal stemmen per school.
In de derde rij kun je het aantal stemmen berekenen door het aantal scholen te vermenigvuldigen met het gemiddelde aantal stemmen per school.

OPKOMST SCHOLIERENVERKIEZINGEN

	aantal stemmen	aantal scholen	gemiddeld aantal stemmen per school
2012	117 468	418	281
2017	140 775	470	300
2021	50 268	284	177

c $\frac{300 - 281}{281} \cdot 100\% \approx 6{,}8\%$

De procentuele toename is 6,8%.

Bladzijde 161

29 **a** Van de vogels is $\frac{9}{500} \cdot 100\% = 1{,}8\%$ verdwenen.

Van de zoogdieren is $\frac{2}{110} \cdot 100\% \approx 1{,}82\%$ verdwenen.

Van de bijen is $\frac{46}{360} \cdot 100\% \approx 12{,}8\%$ verdwenen.

Dus van de vogels is het percentage verdwenen soorten het kleinst.

b herstelcijfer vogels $= \frac{109}{109 + 78 + 9} \cdot 100\% \approx 55{,}6\%$

herstelcijfer zoogdieren $= \frac{38}{38 + 16 + 2} \cdot 100\% \approx 67{,}9\%$

herstelcijfer bijen $= \frac{150}{150 + 135 + 46} \cdot 100\% \approx 45{,}3\%$

Dus van de bijen is het herstelcijfer het kleinst.

30 **a** In 2015 fietste een Nederlander gemiddeld $\frac{15{,}0 \text{ miljard}}{16{,}9 \text{ miljoen}} = \frac{15\,000 \text{ miljoen}}{16{,}9 \text{ miljoen}} \approx 888$ km.

b In 2020 maakten de Nederlanders samen $0{,}63 \cdot 17\,400\,000 \cdot 366 \approx 4{,}01$ miljard fietstochten.

c In 2010 werden er gemiddeld $\frac{5{,}33 \text{ miljard}}{365} = \frac{5330 \text{ miljoen}}{365} = 14{,}60\ldots$ miljoen fietstochten per dag gemaakt.

In 2010 had Nederland $\frac{14{,}60\ldots \text{ miljoen}}{0{,}88} \approx 16{,}6$ miljoen inwoners.

d In 2020 fietste een Nederlander gemiddeld $\frac{15{,}4 \text{ miljard}}{17{,}4 \text{ miljoen}} = \frac{15\,400 \text{ miljoen}}{17{,}4 \text{ miljoen}} = 885{,}0\ldots$ km.

Dus gemiddeld per dag $\frac{885{,}0\ldots}{366} \approx 2{,}4$ km.

e In 2015 maakten de Nederlanders samen $0{,}72 \cdot 16\,900\,000 \cdot 365 = 4{,}44\ldots$ miljard fietstochten.

Dus in 2015 was de gemiddelde lengte van een fietstocht $\frac{15{,}0 \text{ miljard}}{4{,}44\ldots \text{ miljard}} \approx 3{,}4$ km.

f In 2015 waren er $0{,}72 \cdot 16{,}9$ miljoen $= 12{,}168$ miljoen fietstochten per dag.
In 2020 waren er $0{,}63 \cdot 17{,}4$ miljoen $= 10{,}962$ miljoen fietstochten per dag.
Dus het aantal fietstochten per dag is in de periode 2015-2020 afgenomen.

$\frac{10{,}962 - 12{,}168}{12{,}168} \cdot 100\% \approx -9{,}9\%$

De procentuele afname is 9,9%.

Bladzijde 162

31 **a** Het gevraagde percentage is $\frac{28}{508} \cdot 100\% \approx 5{,}5\%$.

b Het natuurdeel van Utrecht is $\frac{293}{1560} \cdot 100\% \approx 18{,}8\%$.

c Zeeland heeft $\frac{374\,000\,000}{464} \approx 806\,034$ inwoners.

Zuid-Holland heeft $\frac{260\,000\,000}{53} \approx 4\,905\,660$ inwoners.

Dus het scheelt $4\,905\,660 - 806\,034 \approx 4\,099\,600$ inwoners.

d In Overijssel is er $\frac{47}{592 - 47} \cdot 100\% \approx 8{,}6\%$ natuurgebied bijgekomen.

In Groningen is er $\frac{34}{211 - 34} \cdot 100\% \approx 19{,}2\%$ natuurgebied bijgekomen.

Nee, de procentuele toename is niet groter.

e Noord-Brabant heeft $\frac{1\,207\,000\,000}{321} \approx 3\,760\,125$ inwoners.

Drenthe heeft $\frac{3\,760\,125}{5} = 752\,025$ inwoners.

Dus in Drenthe is er $\frac{608\,000\,000}{752\,025} \approx 808$ m^2 natuurgebied per inwoner.

f De totale oppervlakte van Friesland is $\frac{794}{0{,}138} = 5753{,}6\ldots$ km^2.

De landoppervlakte van Friesland is $0{,}58 \cdot 5753{,}6\ldots \approx 3340$ km^2.

g Gelderland heeft $\frac{1\,327\,000\,000}{428} \approx 3\,100\,467$ inwoners.

De oppervlakte van Gelderland is $\frac{1327}{0{,}258} = 5143{,}4\ldots$ km^2.

Dus Gelderland heeft gemiddeld $\frac{3\,100\,467}{5143{,}4\ldots} \approx 603$ inwoners per km^2.

32 **a** 19 200 ha = 192 km^2

De landoppervlakte van Flevoland is $\frac{192}{0{,}136} = 1411{,}7\ldots$ km^2.

De oppervlakte van Flevoland is $\frac{263}{0{,}109} = 2412{,}8\ldots$ km^2.

De oppervlakte van het water in Flevoland is $2412{,}8\ldots - 1411{,}7\ldots \approx 1000$ km^2.

b In Flevoland beheert Staatsbosbeheer 192 : 2 = 96 km^2 bos.
De oppervlakte van Overijssel is $\frac{592}{0,173} = 3421,9\ldots$ km^2.
De oppervlakte van het bos in Flevoland is $0,049 \cdot 3421,9\ldots = 167,6\ldots$ km^2.
Dus $\frac{96}{167,6\ldots} \cdot 100\% \approx 57,3\%$ van het bos in Flevoland wordt door Staatsbosbeheer beheerd.

Bladzijde 163

L6 **a** Er doen $0,146 \cdot 1,2$ miljoen $+ 0,228 \cdot 10,8$ miljoen $\approx 2,6$ miljoen personen van 12 t/m 64 jaar aan fitness.
b Er doen $0,045 \cdot 10,8$ miljoen $= 0,486$ miljoen volwassenen aan voetbal.
Er doen $0,182 \cdot 1,2$ miljoen $= 0,2184$ miljoen jongeren aan voetbal.
Dus het scheelt 0,486 miljoen − 0,2184 miljoen = 0,2676 miljoen ≈ 268 000.
c Er doen $0,074 \cdot 1,2$ miljoen $= 0,0888$ miljoen jongeren aan hockey.
Er doen 88 800 + 30 000 = 118 800 volwassenen aan hockey.
Dus het percentage volwassenen dat aan hockey doet, is $\frac{118\,800}{10\,800\,000} \cdot 100\% = 1,1\%$.

33 **a** Omdat de oppervlakte biologisch gebruikte landbouwgrond per provincie verschilt. Hoe groter deze oppervlakte in een provincie is, hoe groter het cirkeldiagram.
b Je krijgt dan een grote tabel met veel gegevens en hebt daardoor minder goed overzicht. Je ziet dan minder snel het verschil in oppervlakte tussen de verschillende provincies.
c Bij de provincie Friesland is de sector van biologische akkerbouw vrijwel niet te zien.

Bladzijde 164

34 **a** In het linker diagram.
b In het rechter diagram.

Bladzijde 165

35 **a** lijndiagram
b staafdiagram, cirkeldiagram
c lijndiagram
d staafdiagram, cirkeldiagram
e staafdiagram, cirkeldiagram
f lijndiagram
g staafdiagram

36 **a** In 2002 waren er 45 attractieparken.
In 2018 waren er 180 attractieparken.
In 2018 waren er $\frac{180}{45} = 4$ keer zoveel attractieparken, vergeleken met 2002.
b Omdat de lijndiagrammen over verschillende dingen gaan.
c In 2016 was de totale opbrengst uit kaartverkoop $\frac{371 \text{ miljoen}}{1,196} = 310,2\ldots$ miljoen euro.
In 2016 waren er 21 miljoen bezoekers.
Dus is 2016 kostte een kaartje gemiddeld $\frac{310,2\ldots \text{ miljoen}}{21 \text{ miljoen}} \approx 14,77$ euro.
d In 2006 waren er $0,12 \cdot 13$ miljoen $= 1,56$ miljoen buitenlandse bezoekers.
In 2016 waren er $0,18 \cdot 21$ miljoen $= 3,78$ miljoen buitenlandse bezoekers.
De procentuele toename is $\frac{3,78 - 1,56}{1,56} \cdot 100\% \approx 142,3\%$.
e $\frac{95 - 140}{140} \cdot 100\% \approx -32,1\%$
De procentuele afname is 32,1%.
f In 2008 was het gemiddelde aantal bezoekers per park $\frac{16\,000\,000}{140} \approx 114\,000$.
In 2010 was het gemiddelde aantal bezoekers per park $\frac{15\,000\,000}{95} \approx 158\,000$.
Dus het gemiddelde aantal bezoekers per park nam in deze periode toe, en niet af.

Bladzijde 166

37 **a** In 2018 waren er 117 + 395 + 104 = 616 musea.
Hiervan was $\frac{117}{616} \cdot 100\% \approx 19{,}0\%$ kunstmuseum.

b In 2015 waren er 13 000 + 31 000 = 44 000 medewerkers.
In 2019 waren er 15 000 + 32 000 = 47 000 medewerkers.
De procentuele toename is $\frac{47\,000 - 44\,000}{44\,000} \cdot 100\% \approx 6{,}8\%$.

c In 2015 waren er 110 + 388 + 103 = 601 musea.
In 2015 kreeg een museum gemiddeld $\frac{30 \text{ miljoen}}{601} \approx 50\,000$ bezoeken.

d In 2017 kregen de overige musea 0,2 · 33 miljoen = 6,6 miljoen bezoeken.
Dat is gemiddeld $\frac{6{,}6 \text{ miljoen}}{104} \approx 63\,000$ bezoeken per museum.

e In 2019 was het gemiddelde per personeelslid $\frac{314 \text{ miljoen}}{15 \text{ duizend}} = \frac{314\,000 \text{ duizend}}{15 \text{ duizend}} \approx 20\,933$ euro.
In 2020 was het gemiddelde per personeelslid $\frac{321 \text{ miljoen}}{14 \text{ duizend}} = \frac{321\,000 \text{ duizend}}{14 \text{ duizend}} \approx 22\,928$ euro.
De procentuele toename is $\frac{22\,928 - 20\,933}{20\,933} \cdot 100\% \approx 9{,}5\%$.

38 **a** Het gevraagde percentage is $\frac{5838}{55\,761} \cdot 100\% \approx 10{,}5\%$.

b Bij informatica is er een tekort van 0,5 · 320 = 160 banen.

c Bij klassieke talen is er een tekort van 0,17 · 705 ≈ 120 banen.
Bij wiskunde is er een tekort van 0,093 · 5457 ≈ 508 banen.
Dus bij wiskunde is er een groter tekort dan bij klassieke talen.
$\frac{508 - 120}{120} \cdot 100\% \approx 323{,}3\%$
Het scheelt 323,3%.

d 100% − 4,5% = 95,5%
In totaal zijn 0,955 · 55 761 ≈ 53 252 fulltime banen opgevuld.
Dus er werken $\frac{53\,252}{0{,}71} \approx 75\,000$ leraren in het voortgezet onderwijs.

Bladzijde 167

39 **a** De toename is 2015 was 23 000 + 55 000 = 78 000.
De toename is 2016 was 24 000 + 79 000 = 103 000.
Het scheelt 103 000 − 78 000 = 25 000 mensen.

b Dat jaar verhuisden 244 000 − 86 000 = 158 000 mensen uit Nederland.

c In 2011 waren er $\frac{165\,000}{1{,}040 \cdot 0{,}971} \approx 163\,392$ immigranten.
In 2011 waren er 163 392 − 30 000 = 133 392 emigranten.
Dus in 2011 waren er $\frac{163\,392}{133\,392} \approx 1{,}2$ keer zoveel immigranten als emigranten.

d In 2019 waren er 170 000 − 18 000 = 152 000 sterfgevallen.
In 2020 waren er 169 000 sterfgevallen.
In 2020 waren er $\frac{169\,000 - 152\,000}{152\,000} \cdot 100\% \approx 11{,}2\%$ meer sterfgevallen dan in 2019.

e In 2021 waren er 179 000 − 8 000 = 171 000 sterfgevallen.
$\frac{169\,000 - 171\,000}{171\,000} \cdot 100\% \approx -1{,}2\%$
Dus in 2020 lag het aantal sterfgevallen 1,2% lager dan in 2021.

L7 **a** $\frac{160 - 240}{240} \cdot 100\% \approx -33{,}3\%$
De procentuele afname is 33,3%.

b 100% − 36,3% = 63,7%
In 2021 waren er 0,637 · 3,4 miljoen ≈ 2,2 miljoen leden jonger dan 18 jaar.

c gemiddelde in 2006 = $\frac{4\,000\,000}{240} \approx 16\,667$

gemiddelde in 2021 = $\frac{3\,400\,000}{140} \approx 24\,286$

In de periode 2006-2021 is het gemiddeld aantal leden per bibliotheek toegenomen met $\frac{24\,286 - 16\,667}{16\,667} \cdot 100\% \approx 45{,}7\%$.

4.3 Misleidende statistiek

Bladzijde 168

40 **a** De staaf die bij het aantal meisjes hoort is vier keer zo hoog als de staaf die bij het aantal jongens hoort.
b Hilco gaat ervan uit dat de staven bij 0 beginnen. De staven beginnen echter bij 500. Er zitten 580 meisjes en 520 jongens op het Newton College, dus de uitspraak van Hilco klopt niet.

41 **a** Een fietsslotenfabrikant zal misschien de neiging hebben om het linker diagram te gebruiken, omdat het in dat diagram lijkt alsof het aantal fietsendiefstallen meer toeneemt dan in het rechter diagram.
b Ja, omdat een scheurlijn aangeeft dat een gedeelte van de as niet in de figuur is opgenomen.
c Dat is het gemakkelijkst in het linker diagram af te lezen.

Bladzijde 169

42 **a** De telefoon is over de sectoren geplaatst. Dat is niet handig. Nu kun je de verhoudingen tussen de sectoren niet goed zien.
b Nee, de sectoren komen niet overeen met de percentages.
c De sector ‘goed’ komt niet overeen met de corresponderende 65%, maar is groter getekend. Hiermee wordt de indruk gewekt dat van de mensen die de vraag hebben beantwoord een groter deel de app goed vindt dan in werkelijkheid het geval is.

43 **a** De omzet in december is 35 000 euro.
De omzet in januari is 30 000 euro.
De omzet in december is $\frac{35\,000 - 30\,000}{30\,000} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$ meer dan in januari.
b Dit diagram is misleidend doordat op de verticale as geen scheurlijn is gebruikt. Zo wekt het bijvoorbeeld de indruk dat de omzet in december vijf keer zo groot is als in januari. Maar in vraag a heb je gezien dat dat niet waar is.

44 **a** Het dak is niet meegerekend bij de hoogte van de staven.
Door de daken wordt een verkeerde indruk gewekt. Inclusief de daken is de figuur van de categorie ‘geen’ ongeveer vier keer zo hoog als de figuur van de categorie ‘Islam’. Dat moet echter ongeveer elf keer zo hoog zijn, want $54{,}2 : 5{,}0 \approx 11$.
b Het gaat om een procentuele verdeling en daarbij is een cirkeldiagram geschikt.

45 Er is alleen gekeken naar het aantal absenten in oktober. Je weet dus niet hoe het zit met de aantallen absenten in de rest van het jaar.
In de periode 2015-2021 neemt het aantal absenten gelijkmatig toe. Dus voor deze periode klopt de uitspraak van de directeur niet.
Er zijn geen gegevens beschikbaar van de jaren na 2021. Je weet dus niet hoe het zit met de absenten in oktober van de jaren na 2021.
Het is van belang te weten hoeveel leerlingen er elk jaar op deze school hebben gezeten. Als er in 2021 minder leerlingen op deze school zaten dan bijvoorbeeld in 2020, dan is het aantal absenten in 2021 naar verhouding groter dan in 2020.
Ook de getallen langs de assen zorgen voor een misleidende indruk.

46 **a** Dat weet je niet, omdat je het totale aantal leerlingen op beide scholen niet weet.
b De straal van het cirkeldiagram van het Pascal College is 1,5 keer zo groot als die van het Gauss College, dus de oppervlakte van het cirkeldiagram van het Pascal College is $1{,}5^2 = 2{,}25$ keer zo groot.
Stel dat op het Gauss College a leerlingen zitten.
Dan zitten op het Pascal College $2{,}25a$ leerlingen.
aantal vwo-leerlingen Gauss College $= 0{,}307a$
aantal vwo-leerlingen Pascal College $= 0{,}167 \cdot 2{,}25a = 0{,}37575a$
Dus het Gauss College heeft minder vwo-leerlingen dan het Pascal College.

Bladzijde 170

47 **a** Ja, de krantenkop wekt de indruk dat de meerderheid van de bevolking geen vertrouwen in de overheid heeft. Want door te schrijven dat 45% van de bevolking vertrouwen heeft in de overheid wordt geïnsinueerd dat 55% van de bevolking dat niet heeft.
b De krantenkop is niet volledig in zijn informatie en daardoor misleidend.

48 **a** Het lijkt erop dat het BrushBright door de meeste tandartsen wordt aanbevolen. Het zal volgens de tandartsen dus wel het beste zijn.
b De advertentie is misleidend omdat het onvolledig is. Niet alle informatie uit het onderzoek wordt weergegeven.

49 De tabel is misleidend omdat het de gegevens van een korte periode van een paar jaar bevat. In die paar jaar daalde de gemiddelde jaartemperatuur in De Bilt toevallig even, maar sinds 1900 is de trend dat de gemiddelde jaartemperatuur in De Bilt toeneemt.

Bladzijde 171

50 **a** Dat het aantal bezorgde pakketten bij Rapido met 40% toenam en bij de andere bezorgdiensten gemiddeld met 10%, hoeft niet te betekenen dat Rapido vier keer zoveel pakketten bezorgt.
Stel dat Rapido twee jaar geleden 100 pakketten bezorgde, dan zijn dat er nu 140.
Stel dat de andere bezorgdiensten gemiddeld 1000 pakketten bezorgden, dan zijn dat er nu 1100.
Dus de conclusie van Cees is onjuist.
b Reden 1: de andere bezorgdiensten kunnen in absolute aantallen gemiddeld meer zijn gegroeid dan Rapido (zie a).
Reden 2: als bij de andere bezorgdiensten het aantal bezorgde pakketten gemiddeld met 10% steeg, kan er bij die andere bezorgdiensten best eentje zitten waarbij de stijging meer dan 40% was.

51 **a** $\frac{10{,}8 - 13{,}1}{13{,}1} \cdot 100\% \approx -17{,}6\%$, dus de procentuele afname is 17,6%.
Dus Mark heeft gelijk.
b De procentuele afname is $\frac{3{,}9}{9{,}1} \cdot 100\% \approx 42{,}9\%$.
c aantal stemmen voor GroenLinks in 2017 $= 0{,}091 \cdot 0{,}813 \cdot 12\,900\,000 \approx 954\,381$
In 2021 had GroenLinks $9{,}1\% - 3{,}9\% = 5{,}2\%$ van de stemmen.
aantal stemmen voor GroenLinks in 2021 $= 0{,}052 \cdot 0{,}787 \cdot 13\,300\,000 \approx 544\,289$
$\frac{544\,289 - 954\,381}{954\,381} \cdot 100\% \approx -43{,}0\%$, dus de procentuele afname is 43,0%.
d Opkomst in 2017 was $0{,}813 \cdot 12{,}9$ miljoen $= 10{,}4877$ miljoen.
Opkomst in 2021 was $0{,}787 \cdot 13{,}3$ miljoen $= 10{,}4671$ miljoen.
In 2017 was het aandeel $\frac{2{,}28 \text{ miljoen}}{10{,}4877 \text{ miljoen}} \cdot 100\% = 21{,}73\ldots\%$.
In 2021 was het aandeel $\frac{2{,}24 \text{ miljoen}}{10{,}4671 \text{ miljoen}} \cdot 100\% = 21{,}40\ldots\%$.
Het aandeel van de VVD is met $21{,}73\ldots\% - 21{,}40\ldots\% = 0{,}33\ldots\%$, dus met ongeveer 0,3 procentpunt gedaald.

L8 **a** Dat is niet het geval. Zowel in 2018 als in 2020 is het aantal misdrijven al groter dan het aantal klachten.

b Het aantal misdrijven is gestegen met $812\,920 - 786\,420 = 26\,500$.

Dat is een procentuele toename van $\frac{26\,500}{786\,420} \cdot 100\% \approx 3{,}4\%$.

Het aantal klachten is gestegen met $13\,326 - 9579 = 3747$.

Dat is een procentuele toename van $\frac{3747}{9579} \cdot 100\% \approx 39{,}1\%$.
De absolute toename van het aantal misdrijven is groter dan die van het aantal klachten, maar de relatieve toename van het aantal klachten is veel groter.
Dus Dirk heeft geen gelijk.

c De titel van het diagram dekt de lading niet.
Bij de assen staat niet waar het over gaat, de assen hebben geen schaalverdeling en de verticale as heeft geen scheurlijn.
De gegevens van 2019 ontbreken, dus je weet niks over het aantal misdrijven en het aantal klachten in dat jaar.
Alle bovenstaande zaken zorgen ervoor dat de figuur misleidend is.

4.4 Interpoleren en extrapoleren

Bladzijde 172

52 **a** De daling is $548 - 380 = 168$ gemeenten.

b Dat is een gemiddelde daling van $\frac{168}{20} = 8{,}4$ gemeenten per jaar.

c 2000 is twee jaar na 1998, dus een schatting voor 2000 is $548 - 2 \cdot 8{,}4 \approx 531$ gemeenten.

d 2014 is zestien jaar na 1998, dus een schatting voor 2014 is $548 - 16 \cdot 8{,}4 \approx 414$ gemeenten.

Bladzijde 174

53 **a** In de periode 2000-2010 is de gemiddelde verandering $\frac{9{,}7 - 6{,}5}{10} = 0{,}32$ miljoen euro per jaar.

b Dat kan allebei omdat 2009 negen jaar na 2000 is, maar ook één jaar voor 2010.

54 **a** gemiddelde per jaar $= \frac{414\,100 - 385\,400}{2014 - 2008} = 4783{,}3\ldots$

2012 is 4 jaar na 2008, dus het aantal onderbouwleerlingen is $385\,400 + 4 \cdot 4783{,}3\ldots \approx 404\,500$.

b gemiddelde per jaar $= \frac{383\,600 - 414\,100}{2021 - 2014} = -4357{,}1\ldots$

2023 is 2 jaar na 2021, dus het aantal onderbouwleerlingen is $383\,600 + 2 \cdot -4357{,}1\ldots \approx 374\,900$.

55 **a** gemiddelde per jaar $= \frac{6{,}6 - 3{,}7}{2017 - 2012} = 0{,}58$ miljoen

2015 is 3 jaar na 2012, dus het aantal huishoudens met internet op een telefoon is $3{,}7 + 3 \cdot 0{,}58 \approx 5{,}4$ miljoen.

b gemiddelde per jaar $= \frac{7{,}1 - 6{,}6}{2021 - 2017} = 0{,}125$ miljoen

2020 is 1 jaar voor 2021, dus het aantal huishoudens met internet op een telefoon is $7{,}1 - 1 \cdot 0{,}125 \approx 7{,}0$ miljoen.

c 2025 is 4 jaar na 2021, dus het aantal huishoudens met internet op een telefoon is $7{,}1 + 4 \cdot 0{,}125 = 7{,}6$ miljoen.

56 **a** 2016 ligt midden tussen 2014 en 2018, dus het aantal rokende mannen is $\frac{2{,}49 + 2{,}21}{2} = 2{,}35$ miljoen.

b gemiddelde per jaar $= \frac{(1{,}45 + 2{,}16) - (1{,}65 + 2{,}21)}{2021 - 2018} = -0{,}083\ldots$ miljoen

2020 is 2 jaar na 2018, dus het aantal rokers is $(1{,}65 + 2{,}21) + 2 \cdot -0{,}083\ldots \approx 3{,}69$ miljoen.

c gemiddelde per jaar $= \frac{1{,}45 - 1{,}65}{2021 - 2018} = -0{,}066\ldots$ miljoen

2026 is 5 jaar na 2021, dus het aantal rokende vrouwen is $1{,}45 + 5 \cdot -0{,}066\ldots \approx 1{,}12$ miljoen.

57 **a** Omdat die jaren verder in het verleden liggen dan de jaren 2010 en 2023.

b gemiddelde per jaar $= \frac{14{,}7 - 8{,}3}{2023 - 1995} = 0{,}22\ldots$ miljoen euro

2028 is 5 jaar na 2023, dus de omzet is $14{,}7 + 5 \cdot 0{,}22\ldots \approx 15{,}8$ miljoen euro.

c Deze schatting wijkt 0,8 miljoen euro af van de schatting in het voorbeeld.
Je kunt niet weten wat een betere schatting is, want je kunt niet in de toekomst kijken.

Bladzijde 175

58 **a** gemiddelde per meter $= \frac{19{,}2 - 20{,}2}{225 - 150} = -0{,}013\ldots$ °C

180 meter is 30 meter hoger dan 150 meter, dus de temperatuur is $20{,}2 + 30 \cdot -0{,}013\ldots = 19{,}8$ °C.

b gemiddelde per meter $= \frac{17{,}4 - 18{,}1}{350 - 300} = -0{,}014$ °C

420 meter is 70 meter hoger dan 350 meter, dus de temperatuur is $17{,}4 + 70 \cdot -0{,}014 \approx 16{,}4$ °C.

c gemiddelde per meter $= \frac{20{,}2 - 20{,}8}{150 - 100} = -0{,}012$ °C

De temperatuur op de grond is $20{,}8 + 100 \cdot 0{,}012 = 22$ °C.

d gemiddelde per °C daling $= \frac{225 - 150}{20{,}2 - 19{,}2} = 75$ meter

20,0 °C is 0,2 °C lager dan 20,2 °C, dus de hoogte is $150 + 0{,}2 \cdot 75 = 165$ meter.

e gemiddelde per °C daling $= \frac{350 - 300}{18{,}1 - 17{,}4} = 71{,}4\ldots$ meter

15,0 °C is 2,4 °C lager dan 17,4 °C, dus de hoogte is $350 + 2{,}4 \cdot 71{,}4\ldots \approx 520$ meter.

59 **a** gemiddelde per % daling $= \frac{27 - 20}{69 - 17} = 0{,}13\ldots$ jaar

50% is 19% minder dan 69%, dus de leeftijd is $20 + 19 \cdot 0{,}13\ldots \approx 23$ jaar.

b gemiddelde per % daling $= \frac{20 - 17}{95 - 69} = 0{,}11\ldots$ jaar

100% is 5% meer dan 95%, dus de leeftijd is $17 - 5 \cdot 0{,}11\ldots \approx 16$ jaar.

c gemiddelde per % daling $= \frac{30 - 27}{17 - 8} = 0{,}33\ldots$ jaar

0% is 8% minder dan 8%, dus de leeftijd is $30 + 8 \cdot 0{,}33\ldots \approx 33$ jaar.

60 **a** gemiddelde cm armlengte per cm lichaamslengte $= \frac{48 - 42}{138 - 112} = 0{,}23\ldots$

120 cm is 8 cm langer dan 112 cm, dus de armlengte is $42 + 8 \cdot 0{,}23\ldots \approx 44$ cm.

b gemiddeld aantal jaren per cm armlengte $= \frac{8 - 4}{42 - 34} = 0{,}5$

37 cm is 3 cm langer dan 34 cm, dus de leeftijd is $4 + 3 \cdot 0{,}5 \approx 6$ jaar.

61 gemiddelde cm armlengte per cm lichaamslengte $= \frac{52 - 48}{161 - 138} = 0{,}17\ldots$

146 cm is 8 cm langer dan 138 cm, dus de armlengte is $48 + 8 \cdot 0{,}17\ldots \approx 49$ cm.

Zijn lichaamslengte was $\frac{146}{1{,}4} \approx 104$ cm.

gemiddelde cm armlengte per cm lichaamslengte $= \frac{42 - 34}{112 - 76} = 0{,}22\ldots$

104 cm is 8 cm korter dan 112 cm, dus de armlengte is $42 - 8 \cdot 0{,}22\ldots \approx 40$ cm.

De armlengte is met $\frac{49 - 40}{40} \cdot 100\% \approx 23\%$ toegenomen.

L9 **a** gemiddelde per jaar $= \frac{3508 - 2406}{2015 - 2011} = 275{,}5$

2013 is 2 jaar na 2011, dus het aantal vakanties is $2406 + 2 \cdot 275{,}5 = 2957$.

b gemiddelde per jaar $= \frac{5417 - 3508}{2023 - 2015} = 238{,}625$

2026 is 3 jaar na 2023, dus het aantal vakanties is $5417 + 3 \cdot 238{,}625 \approx 6133$.

Gemengde opgaven

Bladzijde 176

1 **a** $\frac{75-70}{70} \cdot 100\% \approx 7{,}1\%$

Dus in 2020 werd er 7,1% meer stroom voor Bitcoin verbruikt dan door Oostenrijk.

$\frac{75-111}{111} \cdot 100\% \approx -32{,}4\%$

Dus in 2020 werd 32,4% minder stroom voor Bitcoin verbruikt dan door Nederland.

b In 2016 was de CO2-uitstoot door het gebruik van Bitcoin $\frac{1350 \text{ miljard}}{126} \approx 11$ miljard kg.

c In 2019 was de CO2-uitstoot per transactie gemiddeld $\frac{350 \text{ miljard}}{120 \text{ miljoen}} = \frac{350 \text{ miljard}}{0{,}12 \text{ miljard}} = 2916{,}6\ldots$ kg.

In 2020 was de CO2-uitstoot per transactie gemiddeld $\frac{450 \text{ miljard}}{110 \text{ miljoen}} = \frac{450 \text{ miljard}}{0{,}11 \text{ miljard}} = 4090{,}9\ldots$ kg.

Dus in de periode 2019-2020 is de gemiddelde CO2-uitstoot per transactie toegenomen met $\frac{4090{,}9\ldots - 2916{,}6\ldots}{2916{,}6\ldots} \cdot 100\% \approx 40{,}3\%$.

d In 2020 werd $\frac{450 \text{ miljard}}{75 \text{ miljard}} = 6$ kg CO2 uitgestoten per kWh stroom die voor Bitcoin werd verbruikt.

e In 2020 was de klimaatschade van Bitcoin $0{,}82 \cdot 325$ miljard $= 266{,}5$ miljard euro.

Per kg uitgestoten CO2 is dat $\frac{266{,}5 \text{ miljard}}{450 \text{ miljard}} = 0{,}592\ldots$ euro.

In 2021 was de klimaatschade van Bitcoin $0{,}592\ldots \cdot 1350$ miljard $= 799{,}5$ miljard euro.

In 2021 was de marktwaarde van Bitcoin $\frac{799{,}5 \text{ miljard}}{0{,}25} = 3198$ miljard euro.

2 **a** In 2022 zaten er $\frac{367}{0{,}852} \approx 431$ leerlingen op het Ada Lovelace Lyceum.

b Bij de periode 2022-2024 hoort de factor $0{,}852 \cdot 1{,}163 = 0{,}9908\ldots$

Dus de procentuele afname is 0,9%.

c In 2024 zaten er $1{,}163 \cdot 367 \approx 427$ leerlingen op het Ada Lovelace Lyceum.

Dat jaar zaten er $0{,}056 \cdot 427 \approx 24$ leerlingen in een examenklas.

In 2022 zaten er $\frac{24}{1{,}094 \cdot 1{,}1} \approx 20$ leerlingen in een examenklas.

Dat is $\frac{20}{431} \cdot 100\% \approx 4{,}6\%$.

d In 2025 zaten er $1{,}083 \cdot 24 \approx 26$ leerlingen in een examenklas.

Dat jaar zaten er $\frac{26}{0{,}053} \approx 491$ leerlingen op de school.

Bladzijde 177

3 **a** $\frac{3691-4619}{4619} \cdot 100\% \approx -20{,}1\%$

Dus 20,1% minder.

b In 2018 waren er $0{,}584 \cdot 3854 \approx 2251$ meldingen vanwege een psychische aandoening.

c In 2017 waren dat $0{,}260 \cdot 4619 \approx 1201$ meldingen.

In 2021 waren dat $0{,}149 \cdot (2654 + 1866) \approx 673$ meldingen.

In de periode 2017-2021 is het aantal meldingen van aandoeningen aan het bewegingsapparaat afgenomen.

$\frac{673-1201}{1201} \cdot 100\% \approx -44{,}0\%$

De afname is 44,0%.

d In 2020 waren dat $0{,}375 \cdot (2938 + 1918) = 1821$ meldingen.

In 2021 waren dat $0{,}368 \cdot (2654 + 1866) \approx 1663$ meldingen.

De jaarlijks afname is $1821 - 1663 = 158$.

2025 is 4 jaar na 2021, dus het aantal meldingen van psychische aandoeningen is $1663 - 4 \cdot 158 = 1031$.

e aantal overige meldingen in 2019 = 0,128 · 3691 ≈ 472
aantal overige meldingen in 2020 = 0,055 · (2938 + 1918) ≈ 267
aantal overige meldingen in 2021 = 0,062 · (2654 + 1866) ≈ 280
472 : 2 = 236
267 > 236 en 280 > 236, dus Helena heeft geen gelijk.

4 **a** In 2021 waren er 0,062 · (2654 + 1866) ≈ 280 meldingen in de categorie ‘overig’.
Dus in 2021 waren er $\frac{280}{3,6} \cdot 100\,000 \approx 7,8$ miljoen werknemers.

b In 2020 waren er 0,404 · (2938 + 1918) ≈ 1962 meldingen van luchtwegaandoeningen.
Hiervan waren er 1962 − 1918 = 44 niet-covid gerelateerd.
In 2021 waren er 0,421 · (2654 + 1866) ≈ 1903 meldingen van luchtwegaandoeningen.
Hiervan waren er 1903 − 1866 = 37 niet-covid gerelateerd.
$\frac{37 - 44}{44} \cdot 100\% \approx -15,9\%$, dus in de periode 2020-2021 is het aantal niet-covidgerelateerde meldingen van luchtwegaandoeningen afgenomen met 15,9%.

5 **a** In 1971 waren er $\frac{12\,787\,000}{3,30} \approx 3\,874\,848$ woningen.
Dus $\frac{20\,179\,000}{3\,874\,848} \approx 5,21$ kamers per woning.

b In 1930 waren er $\frac{7\,689\,000}{1\,824\,000} = 4,215\ldots$ bewoners per woning.
Dus in 1930 waren er $\frac{4,215\ldots}{4,43} \approx 0,95$ bewoners per kamer.

c In 1998 waren er 4,60 · 6425 duizend = 29 555 duizend kamers.
gemiddelde per jaar $= \frac{29\,555\,000 - 20\,179\,000}{1998 - 1971} = 347\,259,2\ldots$
1992 is 21 jaar na 1971, dus het aantal kamers is 20 179 000 + 21 · 347 259,2… ≈ 27 471 000.

d In 2018 was het aantal bewoners per woning $\frac{17\,181\,000}{7\,741\,000} = 2,219\ldots$
gemiddelde per jaar $= \frac{2,219\ldots - 2,45}{2018 - 1998} = -0,011\ldots$
2030 is 12 jaar na 2018, dus het aantal bewoners per woning is 2,219… + 12 · −0,011… ≈ 2,08.

Diagnostische toets

Bladzijde 180

1 **a** In 2020 had het bedrijf 26 + 7 = 33 locaties.
De procentuele afname is $\frac{7}{33} \cdot 100\% \approx 21,2\%$.

b De relatieve toename is $\frac{1768 - 1716}{1716} \cdot 100\% \approx 3,0\%$.

c gemiddelde in 2020 $= \frac{1716}{33} = 52$
gemiddelde in 2024 $= \frac{1768}{26} = 68$
Dus het gemiddeld aantal medewerkers per locatie nam toe met $\frac{68 - 52}{52} \cdot 100\% \approx 30,8\%$.

d $\frac{20 - 26}{26} \cdot 100\% \approx -23,1\%$
Dus de concurrent had 23,1% minder locaties.

2 Bij de periode 2021-2024 hoort de factor $0{,}863 \cdot 1{,}166 \cdot 0{,}701 = 0{,}7053\ldots$
Dus het aantal werknemers is in die periode afgenomen met 29,5%.

3 **a** Het aantal woningen in 2015 was $\frac{7{,}89 \text{ miljoen}}{1{,}04} \approx 7{,}59$ miljoen.

b In 2020 waren er $0{,}572 \cdot 7{,}89$ miljoen $= 4{,}51308$ miljoen koopwoningen.
In 2015 waren er $\frac{4{,}51308 \text{ miljoen}}{1{,}059} = 4{,}261\ldots$ miljoen koopwoningen.
Dat is $\frac{4{,}261\ldots \text{ miljoen}}{7{,}586\ldots \text{ miljoen}} \cdot 100\% \approx 56{,}2\%$.

c Het aantal woningen in 2010 was $\frac{3{,}15 \text{ miljoen}}{0{,}439} \approx 7{,}18$ miljoen.

4 **a** AANTAL 12-PLUSSERS IN MILJOENEN

jaar	2020	2021	2022
totaal	15,2	15,3	15,4
online kopers	10,8	11,8	11,4

b De procentuele stijging is $\frac{11{,}4 - 10{,}8}{10{,}8} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$.

Bladzijde 181

5 **a** aantal bedrijven in 2014 $= \frac{1\,460\,000\,000}{122\,000} \approx 11\,967$

aantal bedrijven in 2017 $= \frac{1\,730\,000\,000}{162\,000} \approx 10\,679$

aantal bedrijven in 2021 $= \frac{1\,850\,000\,000}{165\,000} \approx 11\,212$

Dus in 2014 was het aantal bedrijven het grootst.

b totale oppervlakte in 2017 $= 10\,679 \cdot 4166 = 44\,488\,714$ m^2
totale oppervlakte in 2021 $= 11\,212 \cdot 4143 = 46\,451\,316$ m^2
Dus de totale oppervlakte is toegenomen met $\frac{46\,451\,316 - 44\,488\,714}{44\,488\,714} \cdot 100\% \approx 4{,}4\%$.

c omzet per m^2 in 2014 $= \frac{122\,000}{3881} = 31{,}43\ldots$

omzet per m^2 in 2021 $= \frac{165\,000}{4143} = 39{,}82\ldots$

Dus de procentuele toename is $\frac{39{,}82\ldots - 31{,}43\ldots}{31{,}43\ldots} \cdot 100\% \approx 26{,}7\%$.

6 **a** aantal verkochte e-books in 2019 $= 0{,}075 \cdot 39{,}9$ miljoen $= 2{,}9925$ miljoen
aantal verkochte e-books in 2020 $= 0{,}087 \cdot 41{,}4$ miljoen $= 3{,}6018$ miljoen
Dus $\frac{3{,}6018 - 2{,}9925}{2{,}9925} \cdot 100\% \approx 20{,}4\%$ meer.

b In 2021 kostte een boek gemiddeld $\frac{647 \text{ miljoen}}{43 \text{ miljoen}} \approx 15{,}05$ euro.

c In 2018 is het aandeel van e-books 7,4%, dus het aandeel van papieren boeken
$100\% - 7{,}4\% = 92{,}6\%$.
aantal verkochte papieren boeken in 2018 $= 0{,}926 \cdot 41{,}2$ miljoen $= 38{,}1512$ miljoen
aantal verkochte papieren boeken in 2020 $= 41{,}4$ miljoen $- 3{,}6018$ miljoen (zie a) $= 37{,}7982$ miljoen
In 2020 werden minder papieren boeken verkocht dan in 2018.
$\frac{37{,}7982 - 38{,}1512}{38{,}1512} \cdot 100\% \approx -0{,}9\%$
Dus 0,9% minder.

7 Het diagram heeft geen titel.
Bij de assen staat niet waar het over gaat.
De stapgrootte op de verticale as is niet steeds hetzelfde.
Bij de 16-jarigen is zowel de lengte als de breedte als de hoogte van de staaf 2,25 keer zo groot als bij de 14-jarigen. De inhoud is dus $2{,}25^3 \approx 11{,}4$ keer zo groot. Er wordt zo de indruk gewekt dat de 16-jarigen 11,4 keer zoveel zakgeld krijgen als de 14-jarigen. Dat is niet realistisch, het is eerder 2,25 keer zoveel.

8 **a** gemiddelde per jaar $= \dfrac{4{,}43 - 3{,}03}{1980 - 1960} = 0{,}07$ miljard
1972 is 12 jaar na 1960, dus de grootte van de wereldbevolking is
$3{,}03 + 12 \cdot 0{,}07 = 3{,}87$ miljard mensen.
b gemiddelde per jaar $= \dfrac{7{,}76 - 6{,}11}{2020 - 2000} = 0{,}0825$ miljard
2045 is 25 jaar na 2020, dus de grootte van de wereldbevolking is
$7{,}76 + 45 \cdot 0{,}0825 \approx 9{,}82$ miljard mensen.

Herhaling

Bladzijde 182

1 **a** $\dfrac{42 - 45}{45} \cdot 100\% \approx -6{,}7\%$
De relatieve afname is 6,7%.
b $\dfrac{63 - 54}{54} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$
De procentuele toename is 16,7%.
c De gemiddelde omzet per winkel in 2023 is $\dfrac{63 \text{ miljoen}}{42} = 1{,}5$ miljoen euro.
De procentuele toename is $\dfrac{1{,}5 - 1{,}2}{1{,}2} \cdot 100\% = 25\%$.

2 **a** $\dfrac{41\,500 - 30\,500}{30\,500} \cdot 100\% \approx 36{,}1\%$
Dus 36,1% groter.
b $\dfrac{11{,}6 - 17{,}8}{17{,}8} \cdot 100\% \approx -34{,}8\%$
Dus 34,8% minder.
c bevolkingsdichtheid Nederland $= \dfrac{17\,800\,000}{41\,500} \approx 429$
bevolkingsdichtheid België $= \dfrac{11\,600\,000}{30\,500} \approx 380$
De bevolkingsdichtheid van Nederland is hoger dan die van België, namelijk
$\dfrac{429 - 380}{380} \cdot 100\% \approx 12{,}9\%$.

3 **a** Bij de periode 2020-2024 hoort de factor $1{,}38 \cdot 0{,}79 = 1{,}0902$.
De procentuele toename is ongeveer 9,0%.
b $0{,}949 \cdot 0{,}949 \cdot 1{,}106 = 0{,}9960\ldots$
Het bedrag is met ongeveer 0,4% afgenomen.

Bladzijde 183

4 **a** In 2019 waren er $\dfrac{11{,}30 \text{ miljoen}}{1{,}012} \approx 11{,}17$ miljoen personen met een autorijbewijs.
b In 2019 kregen $\dfrac{165\,000}{0{,}764} \approx 216\,000$ personen een nieuw autorijbewijs.

5 **a** Het totale aantal personen met een bromfietsrijbewijs was $\frac{279\,000}{0{,}024} \approx 11{,}6$ miljoen.

b In 2020 waren er $\frac{145\,000}{0{,}013} \approx 11{,}2$ miljoen personen met een bromfietsrijbewijs.

6 **a** WEBWINKELS IN NEDERLAND

jaar	2019	2020	2021
aantal (× 1000)	47	58	78

b In 2021 verkochten 78 000 : 4 = 19 500 webwinkels kleding.
In 2019 verkochten 0,28 · 47 000 = 13 160 webwinkels kleding.
Het aantal webwinkels dat kleding verkoopt is in de periode 2019-2021 toegenomen met $\frac{19\,500 - 13\,160}{13\,160} \cdot 100\% \approx 48{,}2\%$.

Bladzijde 184

7 **a** Het aantal boekwinkels in 2019 was $\frac{307 \text{ miljoen}}{504 \text{ duizend}} = \frac{307 \text{ miljoen}}{0{,}504 \text{ miljoen}} \approx 609$.

b Het aantal personeelsleden van boekwinkels in 2019 was $\frac{307 \text{ miljoen}}{108 \text{ duizend}} = \frac{307 \text{ miljoen}}{0{,}108 \text{ miljoen}} \approx 2843$.

c In 2019 zijn er gemiddeld $\frac{2843}{609} \approx 4{,}7$ personeelsleden per boekwinkel.

Alternatieve uitwerking
In 2019 zijn er gemiddeld $\frac{504\,000}{108\,000} \approx 4{,}7$ personeelsleden per boekwinkel.

d De verkoop per m^2 vloeroppervlakte in 2016 was $\frac{332 \text{ miljoen}}{106\,000} = \frac{332 \text{ miljoen}}{0{,}106 \text{ miljoen}} \approx 3132$ euro.

e In 2016 was de gemiddelde vloeroppervlakte $\frac{106\,000}{660} = 160{,}6\ldots \text{ m}^2$.

In 2019 was de gemiddelde vloeroppervlakte $\frac{101\,000}{609} = 165{,}8\ldots \text{ m}^2$.

In 2019 was de gemiddelde vloeroppervlakte van een boekwinkel groter dan in 2016.
Het scheelt $\frac{165{,}8\ldots - 160{,}6\ldots}{160{,}6\ldots} \cdot 100\% \approx 3{,}3\%$.

8 **a** De procentuele toename is $\frac{1870 - 1370}{1370} \cdot 100\% \approx 36{,}5\%$.

b De procentuele toename is $\frac{800 - 545}{545} \cdot 100\% \approx 46{,}8\%$.

c De gemiddelde oppervlakte van een biologisch landbouwbedrijf in 2019 was $\frac{68\,000}{1730} \approx 39$ ha.

d In 2021 was er in Nederland $\frac{765}{0{,}041} \approx 18\,700 \text{ km}^2$ landbouwgrond.

Bladzijde 185

9 **a** De stapgrootte is zowel op de horizontale as als op de verticale as niet steeds hetzelfde.
b Nee, het aantal geslaagden is wel gestegen, maar niet sterk.
Zo is in de periode 2009-2010 de toename 8.
Maar in de periode 2010-2015 is de toename 10 : 5 = 2 per jaar, en in de periode 2015-2023 is de toename onbekend omdat je het aantal geslaagden in 2023 niet weet.
c Omdat de gegevens van de jaren tussen 2010 en 2015, tussen 2015 en 2023, en van 2023 niet zijn weergegeven.
Verder zegt de figuur niks over het slagingspercentage, omdat je alleen maar gegevens hebt van het aantal geslaagden en niet van het totale aantal leerlingen dat examen heeft gedaan.

10 **a** De gemiddelde verandering in miljoenen is $\frac{406-356}{1980-1960}=2{,}5$.

b 1965 is 5 jaar na 1960, dus de grootte van de bevolking is $356+5\cdot 2{,}5\approx 369$ miljoen.

c De gemiddelde verandering in miljoenen is $\frac{447-429}{2020-2000}=0{,}9$.

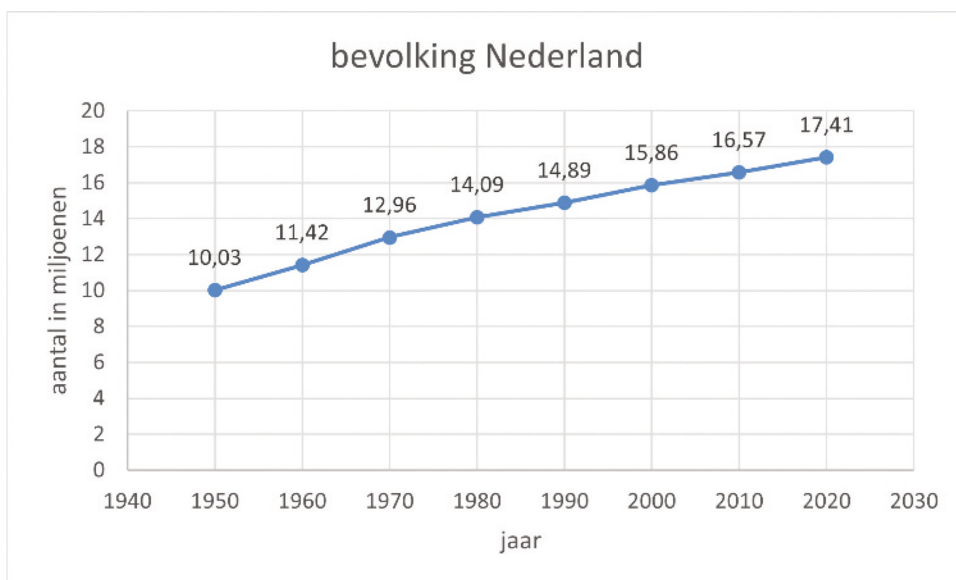
d 2050 is 30 jaar na 2020, dus de grootte van de bevolking is $447+30\cdot 0{,}9=474$ miljoen.

Onderzoek Lijndiagrammen in Excel

Bladzijde 186

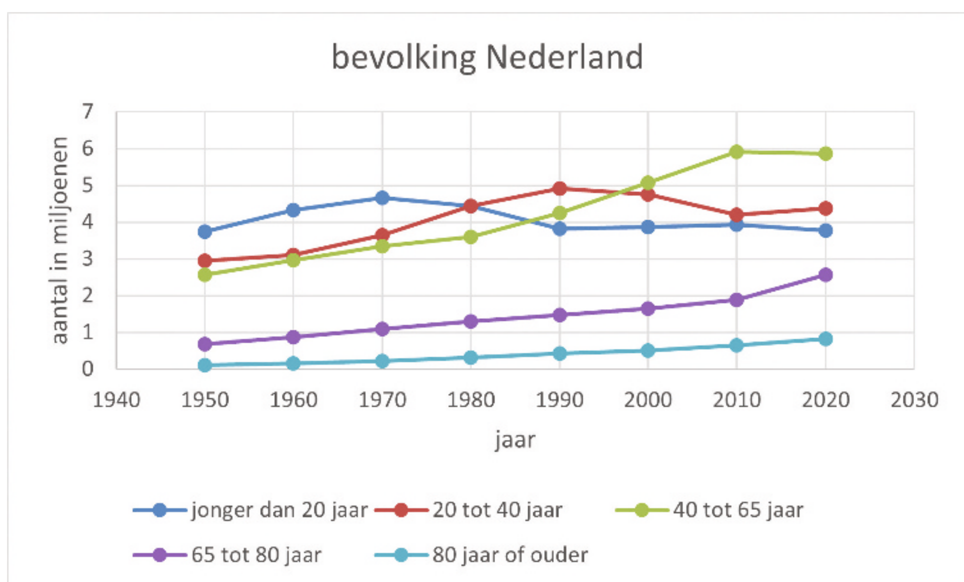
1 **a, c** *

b, d



2 **a** *

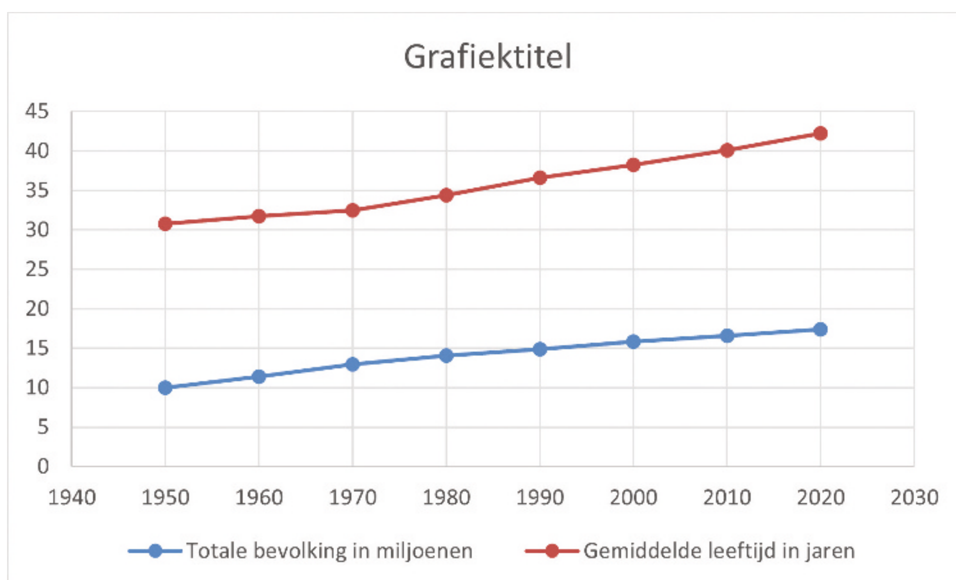
b



Het diagram komt dan helemaal vol te staan met getallen, die daardoor moeilijk leesbaar worden.

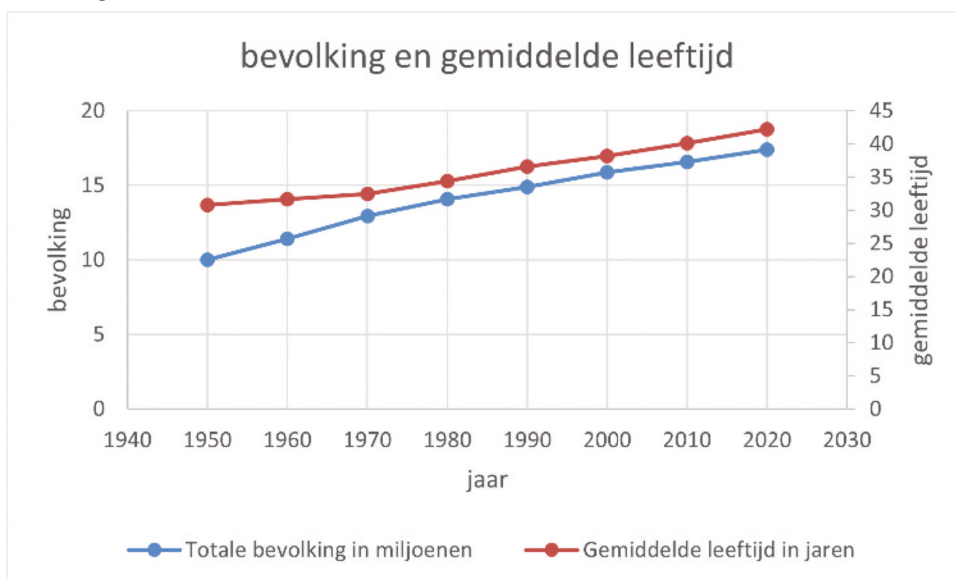
Bladzijde 187

3 **a**

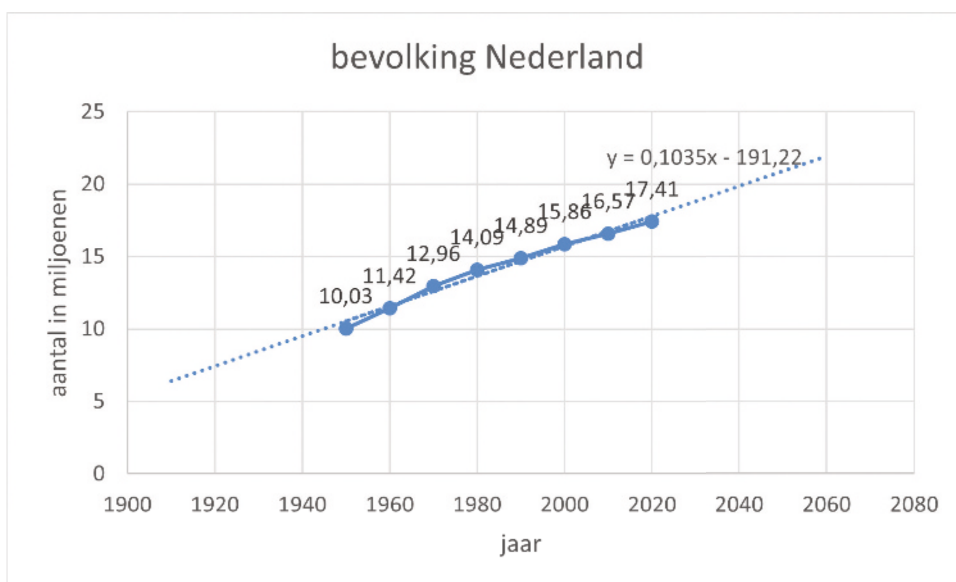


b Het diagram heeft één verticale as waarop zowel de totale bevolking in miljoenen als de gemiddelde leeftijd in jaren moet worden afgelezen. Dat kan niet. Er zijn twee verticale assen nodig.

c, d



4 **a, b**



c $x = 2035$ geeft $y = 0{,}1035 \cdot 2035 - 191{,}22 = 19{,}4025$
Je hebt hiermee het aantal inwoners in miljoenen van Nederland geschat voor het jaar 2035.

d $x = 1920$ geeft $y = 0{,}1035 \cdot 1920 - 191{,}22 = 7{,}5$, dus het geschatte aantal inwoners is 7,5 miljoen.
Het werkelijke aantal is 6,75 miljoen.
Dus de schatting verschilt $7{,}5 - 6{,}75 = 0{,}75$ miljoen met het werkelijke aantal.

e $0{,}1035x - 191{,}22 = 20$
$0{,}1035x = 211{,}22$
$x = 2040{,}7\ldots$
Dus in 2040 wonen er naar schatting 20 miljoen mensen in Nederland.

5 Maak een lijndiagram met de rij 'Jaar' en de rij 'Gemiddelde leeftijd vrouwen in jaren'.
Vind van de trendlijn van dit lijndiagram de bijbehorende formule.
Bereken met deze formule bij de gemiddelde leeftijd $y = 50$ het bijbehorende jaar x.

6 **a** *

b Minder dan één persoon per huishouden kan niet, want een huishouden bestaat altijd uit minstens één persoon. Dus de schatting klopt niet.

7 **a** formule trendlijn meerpersoonshuishoudens: $y = 38{,}161x - 71\,910$
formule trendlijn eenpersoonshuishoudens: $y = 43{,}77x - 85\,355$
$x = 2030$ geeft $y = 38{,}161 \cdot 2030 - 71\,910 = 5556{,}83$
Dus een schatting is 5557 duizend meerpersoonshuishoudens in 2030.
$x = 2030$ geeft $y = 43{,}77 \cdot 2030 - 85\,355 = 3498{,}1$
Dus een schatting is 3498 duizend eenpersoonshuishoudens in 2030.

b $43{,}77x - 85\,355 = 38{,}161x - 71\,910$
$5{,}609x = 13\,445$
$x = 2397{,}04\ldots$
Voor $x = 2397{,}04\ldots$ zijn er evenveel eenpersoonshuishoudens als meerpersoonshuishoudens.
Voor grotere waarden van x zijn er meer eenpersoonshuishoudens dan meerpersoonshuishoudens.
Dus een schatting is dat in het jaar 2397 er meer eenpersoonshuishoudens dan meerpersoonshuishoudens zijn. Dat is ver in de toekomst. Het is niet realistisch dat te schatten met gegevens van de jaren 1950, 1960, …, 2020.

5 Vaardigheden en vergelijkingen

Voorkennis Haakjes wegwerken

Bladzijde 190

1
a $5a + 7(3a - 1) = 5a + 21a - 7 = 26a - 7$
b $5a + 7 \cdot 3a - 1 = 5a + 21a - 1 = 26a - 1$
c $(5a + 7)(3a - 1) = 15a^2 - 5a + 21a - 7 = 15a^2 + 16a - 7$
d $(5a + 7) \cdot 3a - 1 = 15a^2 + 21a - 1$
e $12a - 3(4a - 1) = 12a - 12a + 3 = 3$
f $12a - 3 \cdot 4a - 1 = 12a - 12a - 1 = -1$
g $(12a - 3)(4a - 1) = 48a^2 - 12a - 12a + 3 = 48a^2 - 24a + 3$
h $(12a - 3) \cdot 4a - 1 = 48a^2 - 12a - 1$

2
a $(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$
b $(p + 7)^2 = (p + 7)(p + 7) = p^2 + 7p + 7p + 49 = p^2 + 14p + 49$
c $(a - 5)^2 = (a - 5)(a - 5) = a^2 - 5a - 5a + 25 = a^2 - 10a + 25$
d $(n - 10)^2 = (n - 10)(n - 10) = n^2 - 10n - 10n + 100 = n^2 - 20n + 100$

3
a $2a^2 - (a - 3)(a + 3) = 2a^2 - (a^2 + 3a - 3a - 9) = 2a^2 - a^2 - 3a + 3a + 9 = a^2 + 9$
b $3(4 - 2q) - (2q - 3)(q - 5) = 12 - 6q - (2q^2 - 10q - 3q + 15) =$
$12 - 6q - 2q^2 + 10q + 3q - 15 = -2q^2 + 7q - 3$
c $(x + 5)^2 - (2x - 3)(x + 4) = (x + 5)(x + 5) - (2x^2 + 8x - 3x - 12) =$
$x^2 + 5x + 5x + 25 - 2x^2 - 8x + 3x + 12 = -x^2 + 5x + 37$
d $(1 - y)(3 - y) - (y - 2)^2 = 3 - y - 3y + y^2 - (y - 2)(y - 2) =$
$3 - 4y + y^2 - (y^2 - 2y - 2y + 4) = 3 - 4y + y^2 - y^2 + 2y + 2y - 4 = -1$

5.1 Herleiden

Bladzijde 191

1
$(x + 3)(x - 3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$
$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$
$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$
Een overeenkomst is dat je bij elke herleiding x^2 en 9 krijgt. Een verschil is dat je bij de eerste herleiding – 9 krijgt en bij de tweede en derde herleiding + 9.
Een andere overeenkomst is dat je bij de tweede en derde herleiding $6x$ krijgt, maar een verschil daarbij is weer het plus- en minteken. Bij de eerste herleiding krijg je helemaal geen term met x.

Bladzijde 192

2
a $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$
b $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 36$
c $(a + 8)^2 = a^2 + 16a + 64$
d $(p + 9)^2 = p^2 + 18p + 81$
e $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$
f $(y - 11)^2 = y^2 - 22y + 121$

3
a $(a + 6)^2 = a^2 + 12a + 36$
b $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
c $(3x - 7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$
d $(5m - 1)(5m + 1) = 25m^2 - 1$
e $(3 + 2p)^2 = 9 + 12p + 4p^2$
f $(y - 10)(10 + y) = y^2 - 100$

4
a $(4x + 9)^2 = 16x^2 + 72x + 81$
b $(8x - 3)^2 = 64x^2 - 48x + 9$
c $(a + 3b)(a - 3b) = a^2 - 9b^2$
d $(9m - 10n)^2 = 81m^2 - 180mn + 100n^2$
e $(7a + 2b)^2 = 49a^2 + 28ab + 4b^2$
f $(5a - 2b)(5a + 2b) = 25a^2 - 4b^2$

5 **a** $(a+5)^2+(a-3)^2=$
$a^2+10a+25+a^2-6a+9=$
$2a^2+4a+34$

b $(a+5b)^2+(5a-b)^2=$
$a^2+10ab+25b^2+25a^2-10ab+b^2=$
$26a^2+26b^2$

c $(a+4)^2-(a-4)(a+4)=$
$a^2+8a+16-(a^2-16)=$
$a^2+8a+16-a^2+16=$
$8a+32$

d $(2a+3b)^2-(3a+2b)^2=$
$4a^2+12ab+9b^2-(9a^2+12ab+4b^2)=$
$4a^2+12ab+9b^2-9a^2-12ab-4b^2=$
$-5a^2+5b^2$

6 **a** $(x+4)^2=x^2+8x+16$
b $(x-6)^2=x^2-12x+36$
c $(x-5z)^2=x^2-10xz+25z^2$
d $(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

7 **a** $(p+2)(p-2)(p^2+4)=$
$(p^2-4)(p^2+4)=$
p^4-16

b $(p^2-1)(p+1)(p-1)=$
$(p^2-1)(p^2-1)=$
p^4-2p^2+1

c $(3p-q)(9p^2+q^2)(3p+q)=$
$(9p^2-q^2)(9p^2+q^2)=$
$81p^4-q^4$

d $(p+2)(p^2+4)(p^4+16)(p-2)=$
$(p^2-4)(p^2+4)(p^4+16)=$
$(p^4-16)(p^4+16)=$
p^8-256

L1 **a** $(x+5)(x-5)=x^2-25$
b $(p+4)^2=p^2+8p+16$
c $(2n-5)^2=4n^2-20n+25$

8 Ze vermenigvuldigt het product $3x$ tussen de haakjes met de factor 4 voor de haakjes, maar ze moet eerst het kwadraat herleiden. De juiste herleiding is $4(3x)^2=4\cdot 9x^2=36x^2$.

Bladzijde 193

9 **a** $5(2x-1)^2=$
$5(4x^2-4x+1)=$
$20x^2-20x+5$

b $-(z-4)(z+4)=$
$-(z^2-16)=$
$-z^2+16$

c $-3a(2a+5)^2=$
$-3a(4a^2+20a+25)=$
$-12a^3-60a^2-75a$

d $(x+5)^2-5(x-1)(x-5)=$
$x^2+10x+25-5(x^2-5x-x+5)=$
$x^2+10x+25-5x^2+25x+5x-25=$
$-4x^2+40x$

e $(y-3)^2-2(y-2)(y+2)=$
$y^2-6y+9-2(y^2-4)=$
$y^2-6y+9-2y^2+8=$
$-y^2-6y+17$

f $(2q+3)^2-3q(q-4)^2=$
$4q^2+12q+9-3q(q^2-8q+16)=$
$4q^2+12q+9-3q^3+24q^2-48q=$
$-3q^3+28q^2-36q+9$

10 **a** $-5(x-2)^2-(2x+5)^2=$
$-5(x^2-4x+4)-(4x^2+20x+25)=$
$-5x^2+20x-20-4x^2-20x-25=$
$-9x^2-45$

b $3(8-x)^2-3(x+1)(2-x)=$
$3(64-16x+x^2)-3(2x-x^2+2-x)=$
$192-48x+3x^2-6x+3x^2-6+3x=$
$6x^2-51x+186$

c $2p(q-3)^2+12pq=$
$2p(q^2-6q+9)+12pq=$
$2pq^2-12pq+18p+12pq=$
$2pq^2+18p$

d $5t-3(2t+3)(2t-3)=$
$5t-3(4t^2-9)=$
$5t-12t^2+27$

e $a(2a-6)^2+4a(3-a)^2=$
$a(4a^2-24a+36)+4a(9-6a+a^2)=$
$4a^3-24a^2+36a+36a-24a^2+4a^3=$
$8a^3-48a^2+72a$

f $p(3p+2)^2-3(2p)^2=$
$p(9p^2+12p+4)-3\cdot 4p^2=$
$9p^3+12p^2+4p-12p^2=$
$9p^3+4p$

L2 **a** $4(x+5)^2=$
$4(x^2+10x+25)=$
$4x^2+40x+100$

b $2(n+3)^2-4(n-2)(n+5)=$
$2(n^2+6n+9)-4(n^2+5n-2n-10)=$
$2n^2+12n+18-4n^2-20n+8n+40=$
$-2n^2+58$

Bladzijde 194

11 **a** $(x + 3)(x + y + 1) =$
$x^2 + xy + x + 3x + 3y + 3 =$
$x^2 + xy + 4x + 3y + 3$

b $(2x - y)(x - y + 5) =$
$2x^2 - 2xy + 10x - xy + y^2 - 5y =$
$2x^2 - 3xy + 10x + y^2 - 5y$

c $(3x + 2)^3 =$
$(3x + 2)^2(3x + 2) =$
$(9x^2 + 12x + 4)(3x + 2) =$
$27x^3 + 18x^2 + 36x^2 + 24x + 12x + 8 =$
$27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

d $(x - 1)^3 =$
$(x - 1)^2(x - 1) =$
$(x^2 - 2x + 1)(x - 1) =$
$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 =$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

12 **a** $I = (x - 1)(x - 2)(x - 5) = (x^2 - 2x - x + 2)(x - 5) = (x^2 - 3x + 2)(x - 5)$
$= x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 15x + 2x - 10 = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

b $I = (3a - 4)^3 = (3a - 4)^2(3a - 4) = (9a^2 - 24a + 16)(3a - 4)$
$= 27a^3 - 36a^2 - 72a^2 + 96a + 48a - 64 = 27a^3 - 108a^2 + 144a - 64$

c $I = (2x - 3)(2x + 3)(3x + 1) = (4x^2 - 9)(3x + 1) = 12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$

13 **a** $(x + y + 3)(x - y - 3) =$
$(x + (y + 3))(x - (y + 3)) =$
$x^2 - (y + 3)^2 =$
$x^2 - (y^2 + 6y + 9) =$
$x^2 - y^2 - 6y - 9$

b $(x + y)^2(x - y)^2 =$
$(x + y)(x - y)(x + y)(x - y) =$
$(x^2 - y^2)(x^2 - y^2) =$
$x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

14 **a** $d_1^2 = (n - 1)^2 + (n + 1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2$

b $d_2^2 = (n - 2)^2 + (n + 2)^2 = n^2 - 4n + 4 + n^2 + 4n + 4 = 2n^2 + 8$
$d_2^2 - d_1^2 = 2n^2 + 8 - (2n^2 + 2) = 2n^2 + 8 - 2n^2 - 2 = 6$

$d_3^2 = (n - 3)^2 + (n + 3)^2$
$= n^2 - 6n + 9 + n^2 + 6n + 9$
$= 2n^2 + 18$

$d_4^2 = (n - 4)^2 + (n + 4)^2$
$= n^2 - 16n + 16 + n^2 + 16n + 16$
$= 2n^2 + 32$

$d_3^2 - d_2^2 = 2n^2 + 18 - (2n^2 + 8) = 2n^2 + 18 - 2n^2 - 8 = 10$
$d_4^2 - d_3^2 = 2n^2 + 32 - (2n^2 + 18) = 2n^2 + 32 - 2n^2 - 18 = 14$

c $d_k^2 = (n - k)^2 + (n + k)^2$
$= n^2 - 2kn + k^2 + n^2 + 2kn + k^2$
$= 2n^2 + 2k^2$

$d_{k+1}^2 = (n - (k + 1))^2 + (n + (k + 1))^2$
$= n^2 - 2n(k + 1) + (k + 1)^2 + n^2 + 2n(k + 1) + (k + 1)^2$
$= 2n^2 + 2(k + 1)^2$
$= 2n^2 + 2(k^2 + 2k + 1)$
$= 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2$

$d_{k+1}^2 - d_k^2 = 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2 - (2n^2 + 2k^2) = 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2 - 2n^2 - 2k^2 = 4k + 2$

Alternatieve uitwerking
$d_k^2 = (n - k)^2 + (n + k)^2$
$= n^2 - 2kn + k^2 + n^2 + 2kn + k^2$
$= 2n^2 + 2k^2$

$d_k^2 = 2n^2 + 2k^2$, dus $d_{k+1}^2 = 2n^2 + 2(k + 1)^2 = 2n^2 + 2(k^2 + 2k + 1) = 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2.$
$d_{k+1}^2 - d_k^2 = 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2 - (2n^2 + 2k^2) = 2n^2 + 2k^2 + 4k + 2 - 2n^2 - 2k^2 = 4k + 2$

L3 **a** $(x - 2)(x + 3y - 2) =$
$x^2 + 3xy - 2x - 2x - 6y + 4 =$
$x^2 + 3xy - 4x - 6y + 4$

b $(x + 2)^3 =$
$(x + 2)^2(x + 2) =$
$(x^2 + 4x + 4)(x + 2) =$
$x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8 =$
$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

5.2 Kwadraatafsplitsen

Bladzijde 195

15 **a** $x^2 + 2x =$
$x^2 + 2x + 1 - 1 =$
$(x + 1)^2 - 1$

b $x^2 - 6x =$
$x^2 - 6x + 9 - 9 =$
$(x - 3)^2 - 9$

c $x^2 + 8x =$
$x^2 + 8x + 16 - 16 =$
$(x + 4)^2 - 16$

16 **a** $x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$
b $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$
c $x^2 + 7x = (x + 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4}$
d $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

17 **a** $x^2 + 20x = (x + 10)^2 - 100$
b $x^2 - 16x = (x - 8)^2 - 64$
c $x^2 + 9x = (x + 4\frac{1}{2})^2 - 20\frac{1}{4}$
d $x^2 - 5x = (x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}$

Bladzijde 196

L4 **a** $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$
b $x^2 - 14x = (x - 7)^2 - 49$

18 **a** $x^2 + 6x + 8 =$
$(x + 3)^2 - 9 + 8 =$
$(x + 3)^2 - 1$

b $x^2 - 4x - 7 =$
$(x - 2)^2 - 4 - 7 =$
$(x - 2)^2 - 11$

19 **a** $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 4 + 2 = (x + 2)^2 - 2$
b $x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 1 - 1 = (x - 1)^2 - 2$
c $x^2 + 5x - 21 = (x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} - 21 = (x + 2\frac{1}{2})^2 - 27\frac{1}{4}$
d $x^2 - 3x = (x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}$
e $x^2 + \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + 1\frac{1}{2} = (x + \frac{1}{4})^2 + 1\frac{7}{16}$
f $x^2 + 12x + 39 = (x + 6)^2 - 36 + 39 = (x + 6)^2 + 3$

20 **a** $x^2 + 14x + 50 = (x + 7)^2 - 49 + 50 = (x + 7)^2 + 1$
b $x^2 - 100x + 500 = (x - 50)^2 - 2500 + 500 = (x - 50)^2 - 2000$
c $x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{4}$
d $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$

Bladzijde 197

21 **a** $4x^2 + 24x + 3 =$
$4(x^2 + 6x) + 3 =$
$4((x + 3)^2 - 9) + 3 =$
$4(x + 3)^2 - 36 + 3 =$
$4(x + 3)^2 - 33$

b $-3x^2 + 6x - 1 =$
$-3(x^2 - 2x) - 1 =$
$-3((x - 1)^2 - 1) - 1 =$
$-3(x - 1)^2 + 3 - 1 =$
$-3(x - 1)^2 + 2$

c $10x^2 - 400x - 100 =$
$10(x^2 - 40x) - 100 =$
$10((x - 20)^2 - 400) - 100 =$
$10(x - 20)^2 - 4000 - 100 =$
$10(x - 20)^2 - 4100$

d $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 6\frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2}(x^2 - 12x) + 6\frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2}((x - 6)^2 - 36) + 6\frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 18 + 6\frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 11\frac{1}{2}$

L5 **a** $x^2 + 10x - 3 = (x + 5)^2 - 25 - 3 = (x + 5)^2 - 28$
b $x^2 - 8x + 2 = (x - 4)^2 - 16 + 2 = (x - 4)^2 - 14$

22 Er zijn geen twee gehele getallen met product 1 en som −4.

Bladzijde 198

23 **a** $x^2 + 6x + 3 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + 3 = 0$
$(x + 3)^2 = 6$
$x + 3 = \sqrt{6} \vee x + 3 = -\sqrt{6}$
$x = -3 + \sqrt{6} \vee x = -3 - \sqrt{6}$

b $x^2 + 8x + 9 = 0$
$(x + 4)^2 - 16 + 9 = 0$
$(x + 4)^2 = 7$
$x + 4 = \sqrt{7} \vee x + 4 = -\sqrt{7}$
$x = -4 + \sqrt{7} \vee x = -4 - \sqrt{7}$

c $x^2 - 2x + 9 = 2$
$(x - 1)^2 - 1 + 9 = 2$
$(x - 1)^2 = -6$
geen oplossing

d $x^2 - \frac{1}{2}x = 5$
$(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} = 5$
$(x - \frac{1}{4})^2 = 5\frac{1}{16}$
$x - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} \vee x - \frac{1}{4} = -2\frac{1}{4}$
$x = 2\frac{1}{2} \vee x = -2$

24 **a** $x^2 - 16x - 10 = 0$
$(x - 8)^2 - 64 - 10 = 0$
$(x - 8)^2 = 74$
$x - 8 = \sqrt{74} \vee x - 8 = -\sqrt{74}$
$x = 8 + \sqrt{74} \vee x = 8 - \sqrt{74}$

b $x^2 + 120 = 20x$
$x^2 - 20x + 120 = 0$
$(x - 10)^2 - 100 + 120 = 0$
$(x - 10)^2 = -20$
geen oplossing

c $x^2 = x + \frac{3}{4}$
$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$
$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$
$(x - \frac{1}{2})^2 = 1$
$x - \frac{1}{2} = 1 \vee x - \frac{1}{2} = -1$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

d $x^2 = 5x + 1$
$x^2 - 5x - 1 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} - 1 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 = 7\frac{1}{4}$
$x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{7\frac{1}{4}} \vee x - 2\frac{1}{2} = -\sqrt{7\frac{1}{4}}$
$x = 2\frac{1}{2} + \sqrt{7\frac{1}{4}} \vee x = 2\frac{1}{2} - \sqrt{7\frac{1}{4}}$

25 **a** $x^2 - 6x + 2 = 0$

b $x^2 - 6x + 2 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + 2 = 0$
$(x - 3)^2 = 7$
$x - 3 = \sqrt{7} \vee x - 3 = -\sqrt{7}$
$x = 3 + \sqrt{7} \vee x = 3 - \sqrt{7}$

26 **a** $2x^2 + 12x - 14 = 0$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 - 7 = 0$
$(x + 3)^2 = 16$
$x + 3 = 4 \vee x + 3 = -4$
$x = 1 \vee x = -7$

b $2x^2 + 12x - 14 = 0$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$a = 1$, $b = 6$ en $c = -7$
$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -7 = 64$
$x = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2}$
$x = 1 \vee x = -7$

c $2x^2 + 12x - 14 = 0$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x - 1)(x + 7) = 0$
$x = 1 \vee x = -7$

d *

27 **a** $3x^2 + 15x - 3 = 0$
$x^2 + 5x - 1 = 0$
$a = 1$, $b = 5$ en $c = -1$
$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 29$
$x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

Alternatieve uitwerking
$3x^2 + 15x - 3 = 0$
$x^2 + 5x - 1 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} - 1 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 = 7\frac{1}{4}$
$x + 2\frac{1}{2} = \sqrt{7\frac{1}{4}} \vee x + 2\frac{1}{2} = -\sqrt{7\frac{1}{4}}$
$x = -2\frac{1}{2} + \sqrt{7\frac{1}{4}} \vee x = -2\frac{1}{2} - \sqrt{7\frac{1}{4}}$

b $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 8$
$x^2 - 6x = 16$
$x^2 - 6x - 16 = 0$
$(x + 2)(x - 8) = 0$
$x = -2 \vee x = 8$

c $-x^2 + 20x + 15 = 0$
$x^2 - 20x - 15 = 0$
$(x - 10)^2 - 100 - 15 = 0$
$(x - 10)^2 = 115$
$x - 10 = \sqrt{115} \vee x - 10 = -\sqrt{115}$
$x = 10 + \sqrt{115} \vee x = 10 - \sqrt{115}$

Alternatieve uitwerking
$-x^2 + 20x + 15 = 0$
$x^2 - 20x - 15 = 0$
$a = 1$, $b = -20$ en $c = -15$
$D = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 460$
$x = \frac{20 + \sqrt{460}}{2} \vee x = \frac{20 - \sqrt{460}}{2}$

d $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
$x^2 = 2x + 12$
$x^2 - 2x - 12 = 0$
$(x - 1)^2 - 1 - 12 = 0$
$(x - 1)^2 = 13$
$x - 1 = \sqrt{13} \vee x - 1 = -\sqrt{13}$
$x = 1 + \sqrt{13} \vee x = 1 - \sqrt{13}$

Alternatieve uitwerking
$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
$x^2 = 2x + 12$
$x^2 - 2x - 12 = 0$
$a = 1$, $b = -2$ en $c = -12$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -12 = 52$
$x = \frac{2 + \sqrt{52}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{52}}{2}$

e $2x^2 = 1 - x$
$2x^2 + x - 1 = 0$
$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
$(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = 0$
$(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$
$x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \vee x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -1$

Alternatieve uitwerking
$2x^2 = 1 - x$
$2x^2 + x - 1 = 0$
$a = 2$, $b = 1$ en $c = -1$
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
$x = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4}$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -1$

f $(x + 1)^2 = 4$
$x + 1 = 2 \vee x + 1 = -2$
$x = 1 \vee x = -3$

L6 **a** $x^2 - 10x + 6 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + 6 = 0$
$(x - 5)^2 = 19$
$x - 5 = \sqrt{19} \vee x - 5 = -\sqrt{19}$
$x = 5 + \sqrt{19} \vee x = 5 - \sqrt{19}$

b $x^2 + 2x - 4 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 - 5 = 0$
$(x + 1)^2 = 6$
$x + 1 = \sqrt{6} \vee x + 1 = -\sqrt{6}$
$x = -1 + \sqrt{6} \vee x = -1 - \sqrt{6}$

5.3 Breuken met letters herleiden

Bladzijde 199

28 **a** $\frac{a}{7} = \frac{1}{7}a$ **b** $\frac{2b}{3} = \frac{2}{3}b$ **c** $\frac{4c}{7} = \frac{4}{7}c$

29 **a** $\frac{p(p+q)}{6(p+q)} = \frac{p}{6} = \frac{1}{6}p$ **b** $\frac{2(p+q)}{p+q} = \frac{2}{1} = 2$ **c** $\frac{xy}{x(x+y)} = \frac{y}{x+y}$

Bladzijde 200

30 a $\frac{5a+10b}{5}=\frac{5(a+2b)}{5}=\frac{a+2b}{1}=a+2b$

b $\frac{x^2-3x}{10x}=\frac{x(x-3)}{10x}=\frac{x-3}{10}=\frac{1}{10}(x-3)=\frac{1}{10}x-\frac{3}{10}$

c $\frac{p^2+4p}{p^2+5p+4}=\frac{p(p+4)}{(p+1)(p+4)}=\frac{p}{p+1}$

31 a $\frac{3t^2+6t}{6t}=\frac{3t(t+2)}{3t\cdot 2}=\frac{t+2}{2}=\frac{1}{2}(t+2)=\frac{1}{2}t+1$

b $\frac{p+q}{5p+5q}=\frac{p+q}{5(p+q)}=\frac{1}{5}$

c $\frac{a^2+2a-3}{2a+6}=\frac{(a-1)(a+3)}{2(a+3)}=\frac{a-1}{2}=\frac{1}{2}(a-1)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

32 a $\frac{8a^2-16a}{4a}=\frac{8a(a-2)}{4a}=\frac{2(a-2)}{1}=2(a-2)=2a-4$

b $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+5}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}$

c $\frac{q^2-4}{q^2+4q+4}=\frac{(q+2)(q-2)}{(q+2)(q+2)}=\frac{q-2}{q+2}$

33 a $\frac{2x^2-32}{x^2-8x+16}=\frac{2(x^2-16)}{(x-4)(x-4)}=\frac{2(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-4)}=\frac{2(x+4)}{x-4}=\frac{2x+8}{x-4}$

b $\frac{q^2-8q+12}{3q^2+6q-24}=\frac{(q-2)(q-6)}{3(q^2+2q-8)}=\frac{(q-2)(q-6)}{3(q-2)(q+4)}=\frac{q-6}{3(q+4)}=\frac{q-6}{3q+12}$

c $\frac{2x^2-2x-12}{3x^2+15x+18}=\frac{2(x^2-x-6)}{3(x^2+5x+6)}=\frac{2(x+2)(x-3)}{3(x+2)(x+3)}=\frac{2(x-3)}{3(x+3)}=\frac{2x-6}{3x+9}$

L7 a $\frac{6x+9y}{3}=\frac{3(2x+3y)}{3}=2x+3y$

b $\frac{a^2+2a}{3a}=\frac{a(a+2)}{3a}=\frac{a+2}{3}=\frac{1}{3}(a+2)=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}$

c $\frac{p^2-3p}{p^2-2p-3}=\frac{p(p-3)}{(p-3)(p+1)}=\frac{p}{p+1}$

34 a $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{5}{x}$

b $\frac{5a}{b}-\frac{3a}{b}=\frac{2a}{b}$

c $\frac{p}{r}+\frac{2q}{r}=\frac{p+2q}{r}$

Bladzijde 201

35 a $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{2q}{pq}+\frac{3p}{pq}=\frac{2q+3p}{pq}$

b $\frac{5}{x}-\frac{7}{y}=\frac{5y}{xy}-\frac{7x}{xy}=\frac{5y-7x}{xy}$

c $\frac{2}{x}+\frac{5}{3x}=\frac{6}{3x}+\frac{5}{3x}=\frac{11}{3x}$

Bladzijde 202

36 **a** $\frac{3}{5a}+\frac{4}{a}=\frac{3}{5a}+\frac{20}{5a}=\frac{23}{5a}$

b $\frac{2}{5x}-\frac{7}{2x}=\frac{4}{10x}-\frac{35}{10x}=-\frac{31}{10x}$

c $\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{2y}{y^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{2y-1}{y^2}$

d $\frac{a}{3}-2a=\frac{1}{3}a-2a=-1\frac{2}{3}a$

e $\frac{5}{3x}:\frac{3}{5x}=\frac{5}{3x}\cdot\frac{5x}{3}=\frac{25x}{9x}=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9}$

f $2a:\frac{a}{3}=2a\cdot\frac{3}{a}=\frac{6a}{a}=\frac{6}{1}=6$

37 **a** $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x+2+x}{x(x+1)}=\frac{3x+2}{x(x+1)}$

b $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a+2}{(a-2)(a+2)}-\frac{a-2}{(a-2)(a+2)}=\frac{a+2-(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a+2-a+2}{(a-2)(a+2)}=\frac{4}{(a-2)(a+2)}$

c $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x}{x+2}=\frac{(x+2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}-\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{(x+2)(x+2)-x(x-3)}{(x-3)(x+2)}=$

$\frac{x^2+4x+4-x^2+3x}{(x-3)(x+2)}=\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}$

d $\frac{3x^2}{x+2}:\frac{x}{x+2}=\frac{3x^2}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{3x^2(x+2)}{x(x+2)}=\frac{3x}{1}=3x$

e $\frac{p-3}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p-4}=\frac{(p-3)(p+1)}{(p+1)(p-4)}=\frac{p-3}{p-4}$

f $\frac{2q+8}{q-1}:\frac{q+4}{3q-3}=\frac{2q+8}{q-1}\cdot\frac{3q-3}{q+4}=\frac{(2q+8)(3q-3)}{(q-1)(q+4)}=\frac{2(q+4)\cdot 3(q-1)}{(q-1)(q+4)}=\frac{6}{1}=6$

Bladzijde 203

38 **a** $\frac{\left(\frac{2x}{5}\right)}{3}=\frac{\frac{2x}{5}\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{2x}{15}=\frac{2}{15}x$

b $\frac{\left(\frac{5}{3a}\right)}{10b}=\frac{\frac{5}{3a}\cdot 3a}{10b\cdot 3a}=\frac{5}{30ab}=\frac{1}{6ab}$

c $\frac{9}{\left(\frac{6a}{5}\right)}=\frac{9\cdot 5}{\frac{6a}{5}\cdot 5}=\frac{45}{6a}=\frac{15}{2a}$

39 **a** $\frac{\left(\frac{3}{x}\right)}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{x}=\frac{3}{5x}$

b $\frac{10}{\left(\frac{3}{5x}\right)}=10:\frac{3}{5x}=\frac{10}{1}\cdot\frac{5x}{3}=\frac{50x}{3}=\frac{50}{3}x=16\frac{2}{3}x$

40 **a** $\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{3n-6}{3-n}=\frac{(n+1)(3n-6)}{(n-2)(3-n)}=\frac{(n+1)\cdot 3(n-2)}{(n-2)(3-n)}=\frac{3(n+1)}{3-n}=\frac{3n+3}{3-n}$

b $\frac{\left(\frac{3b}{7}\right)}{4}=\frac{\frac{3b}{7}\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{3b}{28}=\frac{3}{28}b$

c $\frac{w+3}{1-w}-\frac{w+1}{w-3}=\frac{(w+3)(w-3)}{(1-w)(w-3)}-\frac{(1-w)(w+1)}{(1-w)(w-3)}=\frac{(w+3)(w-3)-(1-w)(1+w)}{(1-w)(w-3)}=$

$\frac{w^2-9-(1-w^2)}{(1-w)(w-3)}=\frac{w^2-9-1+w^2}{(1-w)(w-3)}=\frac{2w^2-10}{(1-w)(w-3)}$

d $\frac{100}{\left(\frac{5d}{2}\right)}=\frac{100\cdot 2}{\frac{5d}{2}\cdot 2}=\frac{200}{5d}=\frac{40}{d}$

e $\frac{2q+3}{q}:\frac{4q+6}{5q^2}=\frac{2q+3}{q}\cdot\frac{5q^2}{4q+6}=\frac{5q^2(2q+3)}{q(4q+6)}=\frac{5q^2(2q+3)}{2q(2q+3)}=\frac{5q}{2}=\frac{5}{2}q=2\frac{1}{2}q$

f $3x-1+\frac{x+2}{x-3}=\frac{(3x-1)(x-3)}{x-3}+\frac{x+2}{x-3}=\frac{3x^2-9x-x+3+x+2}{x-3}=\frac{3x^2-9x+5}{x-3}$

41 **a** $\frac{\left(\frac{4}{t-1}\right)}{2t}+6=\frac{\frac{4}{t-1}\cdot(t-1)}{2t(t-1)}+6=\frac{4}{2t(t-1)}+\frac{12t(t-1)}{2t(t-1)}=\frac{4+12t^2-12t}{2t(t-1)}$

b $\frac{3x}{\left(\frac{4}{x-2}\right)}-2x=\frac{3x(x-2)}{\frac{4}{x-2}\cdot(x-2)}-2x=\frac{3x(x-2)}{4}-2x=\frac{3}{4}x^2-1\frac{1}{2}x-2x=\frac{3}{4}x^2-3\frac{1}{2}x$

c $\frac{\left(\frac{n}{n-2}\right)}{\left(\frac{1}{n+2}\right)}-n=\frac{\frac{n}{n-2}\cdot(n-2)(n+2)}{\frac{1}{n+2}\cdot(n-2)(n+2)}-n=\frac{n(n+2)}{n-2}-\frac{n(n-2)}{n-2}=\frac{n(n+2)-n(n-2)}{n-2}=$

$\frac{n^2+2n-n^2+2n}{n-2}=\frac{4n}{n-2}$

L8 **a** $\frac{3}{x^2y} - \frac{2}{xy^2} = \frac{3y}{x^2y^2} - \frac{2x}{x^2y^2} = \frac{3y - 2x}{x^2y^2}$

b $\frac{1}{a+2} - \frac{3}{a-2} = \frac{a-2}{(a+2)(a-2)} - \frac{3(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a-2-3(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a-2-3a-6}{(a+2)(a-2)} = \frac{-2a-8}{(a+2)(a-2)}$

c $\frac{4}{p+1} : \frac{5}{6p+6} = \frac{4}{p+1} \cdot \frac{6p+6}{5} = \frac{4(6p+6)}{5(p+1)} = \frac{24(p+1)}{5(p+1)} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

d $\frac{7}{\left(\frac{3}{4x}\right)} = \frac{7 \cdot 4x}{\frac{3}{4x} \cdot 4x} = \frac{28x}{3} = \frac{28}{3}x = 9\frac{1}{3}x$

5.4 Gebroken vergelijkingen

Bladzijde 204

42 **a** 24 schilders doen 3 dagen over de klus.

b 4 schilders doen 18 dagen over de klus.

c Als je vier keer zoveel schilders hebt, dan duurt het schilderen vier keer zo kort.

d

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	72	36	24	18	12	9	6	3
xy	72	72	72	72	72	72	72	72

Als je x met een getal vermenigvuldigt, moet je de bijbehorende y door dat getal delen. De uitkomst van het product xy is steeds 72.

Bladzijde 205

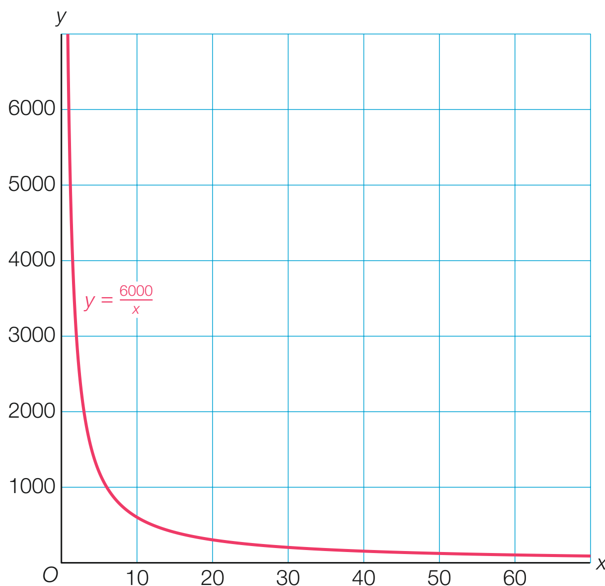
43 **a** Ieder ontvangt dan 6000 : 6 = 1000 euro.

b Er geldt $xy = 6000$, dus $y = \frac{6000}{x}$.

c Bij heel veel goede inzendingen ontvangt ieder een heel klein geldbedrag omdat de 6000 euro over heel veel mensen moet worden verdeeld. Dus als er heel veel goede inzendingen zijn, dan is y heel klein.

d

x	1	2	3	4	6	10	20	30	40	50	60
y	6000	3000	2000	1500	1000	600	300	200	150	120	100



44 **a** Twee cavia's kunnen 80 dagen eten van de zak droogvoer.
b Tien dagen eten betekent dat ze $\frac{4 \cdot 40}{10} = 16$ cavia's hebben.
c Er geldt $xy = 4 \cdot 40 = 160$, dus de formule is $y = \frac{160}{x}$.
d Als x heel groot is, is y heel klein.
e Als het aantal cavia's verdubbelt, dan halveert y.

Bladzijde 206

45 **a** De oppervlakte van de stal is $40 \cdot 25 = 1000$ m^2, dus er mogen $1000 \cdot 9 = 9000$ kippen in de stal worden gehouden.
b De oppervlakte van de stal is 1000 m^2 = 10 000 000 cm^2, dus $L = 10\,000\,000 : 8000 = 1250$ cm^2.
c Er geldt $L \cdot a = 10\,000\,000$, dus $L = \frac{10\,000\,000}{a}$.
d 20 dm^2 = 2000 cm^2, dus 10 000 000 : 2000 = 5000 kippen.

L9 **a** Vijf glazenwassers doen er $\frac{3 \cdot 80}{5} = 48$ uur over.
b Er geldt $xy = 3 \cdot 80 = 240$, dus de formule is $y = \frac{240}{x}$.

46 $12 \cdot 5 = 60$ en $30 \cdot 2 = 60$.
De producten zijn gelijk.

Bladzijde 207

47 **a**
$\frac{5}{5+x} = \frac{3}{4}$
$3(5+x) = 4 \cdot 5$
$15 + 3x = 20$
$3x = 5$
$x = 1\frac{2}{3}$

b
$\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{5}$
$5(x+3) = 2(x-3)$
$5x + 15 = 2x - 6$
$3x = -21$
$x = -7$

c
$\frac{5}{x} = 7$
$\frac{5}{x} = \frac{7}{1}$
$7x = 5$
$x = \frac{5}{7}$

48 **a**
$\frac{8}{2x-1} = \frac{3}{x+1}$
$8(x+1) = 3(2x-1)$
$8x + 8 = 6x - 3$
$2x = -11$
$x = -5\frac{1}{2}$

b
$5 - \frac{6}{3-x} = 5{,}4$
$\frac{-6}{3-x} = \frac{0{,}4}{1}$
$0{,}4(3-x) = -6$
$1{,}2 - 0{,}4x = -6$
$-0{,}4x = -7{,}2$
$x = 18$

c
$\frac{120}{0{,}3x+6} - 6 = 4$
$\frac{120}{0{,}3x+6} = \frac{10}{1}$
$10(0{,}3x+6) = 120$
$3x + 60 = 120$
$3x = 60$
$x = 20$

Bladzijde 208

49 **a**
$\frac{5}{2x+5} = \frac{16}{3x-1}$
$16(2x+5) = 5(3x-1)$
$32x + 80 = 15x - 5$
$17x = -85$
$x = -5$

b
$\frac{18-2x}{6+x} = 3$
$\frac{18-2x}{6+x} = \frac{3}{1}$
$3(6+x) = 18 - 2x$
$18 + 3x = 18 - 2x$
$5x = 0$
$x = 0$

c
$100 - \frac{12x}{x-30} = 82$
$\frac{18}{1} = \frac{12x}{x-30}$
$18(x-30) = 12x$
$18x - 540 = 12x$
$6x = 540$
$x = 90$

50 **a**
$5 - \frac{8-2x}{2+0{,}4x} = 7$
$\frac{-2}{1} = \frac{8-2x}{2+0{,}4x}$
$-2(2+0{,}4x) = 8 - 2x$
$-4 - 0{,}8x = 8 - 2x$
$1{,}2x = 12$
$x = 10$

b
$\frac{x-1}{3} = \frac{5}{x+1}$
$(x-1)(x+1) = 3 \cdot 5$
$x^2 - 1 = 15$
$x^2 = 16$
$x = 4 \vee x = -4$

c
$x + \frac{3}{x-1} = 5$
$\frac{3}{x-1} = \frac{5-x}{1}$
$(x-1)(5-x) = 3$
$5x - x^2 - 5 + x = 3$
$-x^2 + 6x - 8 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x-2)(x-4) = 0$
$x = 2 \vee x = 4$

51 **a** $h = 20$ geeft $V = \frac{320}{20} = 16$, dus 20 cm boven de grondwaterstand is het vochtgehalte 16%.

b Stijn heeft gelijk, want de formule hoort bij een omgekeerd evenredig verband tussen V en h.

c $V = 5$ geeft $5 = \frac{320}{h}$ en $V = 10$ geeft $10 = \frac{320}{h}$

$\frac{5}{1} = \frac{320}{h}$ $\qquad \frac{10}{1} = \frac{320}{h}$

$5h = 320$ $\qquad 10h = 320$

$h = 64$ $\qquad h = 32$

Dus hierbij horen hoogten tussen de 32 en 64 cm boven de grondwaterstand.

52 **a** $x = 2000$ geeft $K = \frac{4{,}5 \cdot 2000 + 1200}{2000} = 5{,}1$

Dus de kosten per kalender zijn €5,10.

b $x = 1500$ geeft $K = \frac{4{,}5 \cdot 1500 + 1200}{1500} = 5{,}3$

De totale kosten zijn $1500 \cdot 5{,}3 = 7950$ euro.

c $K = 4{,}90$ geeft $\frac{4{,}5x + 1200}{x} = 4{,}90$

$\frac{4{,}5x + 1200}{x} = \frac{4{,}9}{1}$

$4{,}9x = 4{,}5x + 1200$

$0{,}4x = 1200$

$x = 3000$

Er zijn 3000 kalenders gemaakt.

53 De club heeft 12 000 euro te besteden en maakt x kalenders, dus $K = \frac{12\,000}{x}$.

Dit geeft $\frac{4{,}5x + 1200}{x} = \frac{12\,000}{x}$.

In het linker- en rechterlid is de noemer gelijk, dus er moet gelden

$4{,}5x + 1200 = 12\,000$

$4{,}5x = 10\,800$

$x = 2400$

De club kan maximaal 2400 kalenders maken.

L10 **a** $\frac{4}{x-3} = \frac{2}{5}$

$2(x-3) = 4 \cdot 5$

$2x - 6 = 20$

$2x = 26$

$x = 13$

b $\frac{x-1}{x+3} = 3$

$\frac{x-1}{x+3} = \frac{3}{1}$

$3(x+3) = x - 1$

$3x + 9 = x - 1$

$2x = -10$

$x = -5$

c $\frac{5}{3x-4} = \frac{3}{x+2}$

$3(3x-4) = 5(x+2)$

$9x - 12 = 5x + 10$

$4x = 22$

$x = 5\frac{1}{2}$

5.5 Wortels herleiden

Bladzijde 209

54 **a** $(2\sqrt{3})^2 = 12$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

c $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

d $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Bladzijde 210

55 **a** $(-3\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{6})^2 = 9 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 45 - 12 = 33$

b $\frac{8\sqrt{72}}{-4\sqrt{6}} = -2\sqrt{12} = -2 \cdot 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

c $7\sqrt{2} - \sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d $\frac{20\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 10$

e $5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{21} = 15\sqrt{63} = 15 \cdot 3\sqrt{7} = 45\sqrt{7}$

f $\frac{4\sqrt{81}}{2\sqrt{25}} = \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 5} = \frac{36}{10} = 3\frac{6}{10} = 3\frac{3}{5}$

56 a $-3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{5} = -6\sqrt{40} = -6 \cdot 2\sqrt{10} = -12\sqrt{10}$

b $5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{18} = 10 \cdot 3\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

c $\sqrt{90} - 2\sqrt{45} = 3\sqrt{10} - 2 \cdot 3\sqrt{5} = 3\sqrt{10} - 6\sqrt{5}$

d $3\sqrt{60} + 2\sqrt{135} = 3 \cdot 2\sqrt{15} + 2 \cdot 3\sqrt{15} = 6\sqrt{15} + 6\sqrt{15} = 12\sqrt{15}$

e $\sqrt{3\frac{3}{4}} - \sqrt{60} = \sqrt{\frac{15}{4}} - 2\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}} - 2\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2} - 2\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = -1\frac{1}{2}\sqrt{15}$

f $8\sqrt{3} \cdot -\sqrt{21} - 2\sqrt{7} = -8\sqrt{63} - 2\sqrt{7} = -8 \cdot 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = -24\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = -26\sqrt{7}$

57 a $2\sqrt{32} - 3\sqrt{8} = 2 \cdot 4\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b $\sqrt{18} \cdot 2\sqrt{2} - 4(\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{36} - 4 \cdot 3 = 2 \cdot 6 - 12 = 12 - 12 = 0$

c $3\sqrt{12} \cdot 5\sqrt{6} = 15\sqrt{72} = 15 \cdot 6\sqrt{2} = 90\sqrt{2}$

d $\sqrt{2\frac{2}{9}} - \frac{5\sqrt{15}}{15\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{20}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

e $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} - 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{24} - 5\sqrt{24} = -3\sqrt{24} = -3 \cdot 2\sqrt{6} = -6\sqrt{6}$

f $\frac{6\sqrt{40}}{3\sqrt{2}} - 5\sqrt{125} = 2\sqrt{20} - 5 \cdot 5\sqrt{5} = 2 \cdot 2\sqrt{5} - 25\sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 25\sqrt{5} = -21\sqrt{5}$

58 a $2\sqrt{3}(3\sqrt{2} - 4) = 6\sqrt{6} - 8\sqrt{3}$

b $(1 + \sqrt{10})^2 = 1 + 2\sqrt{10} + 10 = 11 + 2\sqrt{10}$

c $(3\sqrt{2} - \sqrt{5})(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 9 \cdot 2 - 5 = 18 - 5 = 13$

d $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2 = 25 \cdot 3 + 2 \cdot 15\sqrt{15} + 9 \cdot 5 = 75 + 30\sqrt{15} + 45 = 120 + 30\sqrt{15}$

e $(\sqrt{5} + 4)(2 - 3\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 3 \cdot 5 + 8 - 12\sqrt{5} = -10\sqrt{5} - 15 + 8 = -10\sqrt{5} - 7$

f $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2\sqrt{50} + 10 = 20 - 4 \cdot 5\sqrt{2} + 10 = 30 - 20\sqrt{2}$

59 a $(\sqrt{a} + 3)^2 = a + 6\sqrt{a} + 9$

b $(\sqrt{a+3})^2 = a + 3$

c $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

d $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$

e $(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = a^2b - ab^2$

f $(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})^2 = a^2b + 2ab\sqrt{ab} + ab^2$

Bladzijde 211

L11 a $(3\sqrt{5})^2 - 8(\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 45 - 16 = 29$

b $\frac{8\sqrt{50}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

c $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{20} = 6\sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

d $\frac{10\sqrt{72}}{2\sqrt{4}} = 5\sqrt{18} = 5 \cdot 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

e $\sqrt{3} + 3\sqrt{12} = \sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

f $\sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

60 a $\sqrt{1\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{70}{49}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{70}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{70}$

b $\sqrt{2\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{55}{25}} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{55}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{55}$

Bladzijde 212

61 a $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

b $\sqrt{4\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$

c $\frac{21}{3\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$

d $4\sqrt{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

e $\frac{9}{2\sqrt{6}} = \frac{9 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{9}{12}\sqrt{6} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

f $\sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$

62 **a** $\frac{10}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{8} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + 3 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

b $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

c $\sqrt{24} - \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} - \frac{12 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = 2\sqrt{6} - \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 0$

63 **a** $\sqrt{24\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{18} = \sqrt{\frac{49}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{49} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c $\frac{18}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{27} = \frac{18 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} + 4 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{18\sqrt{3}}{3} + 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

64 **a** De herleiding van Sacha:

$\frac{5}{\sqrt{32}} = \frac{5 \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}} = \frac{5\sqrt{32}}{32} = \frac{5}{32}\sqrt{32} = \frac{5}{32} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{20}{32}\sqrt{2} = \frac{5}{8}\sqrt{2}$

De herleiding van Bo:

$\frac{5}{\sqrt{32}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{64}} = \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{5}{8}\sqrt{2}$

Dus Bo heeft gelijk.

b Bo heeft gezien dat $32 \cdot 2 = 64$ een kwadraat is. Dus dat $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$.

c $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$ en

$\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{20}} = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{15}}{\sqrt{100}} = \frac{10\sqrt{15}}{10} = \sqrt{15}$

d $\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \frac{6\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = 2$

L12 **a** $\frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{18 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{6} = 3\sqrt{6}$

b $\sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{21}$

c $\frac{48}{4\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

65 **a** $\angle B = 90°$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(2\sqrt{10})^2 + BC^2 = 8^2$

$40 + BC^2 = 64$

$BC^2 = 24$

$BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{6} = 2\sqrt{60} = 2 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

Bladzijde 213

66 $\angle R = 90°$, dus $PR^2 + QR^2 = PQ^2$

$PR^2 + (3\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2$

$PR^2 + 18 = 50$

$PR^2 = 32$

$PR = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

De omtrek is $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 6 \cdot 2 = 12$.

67 $\angle E = 90°$, dus $DE^2 + EF^2 = DF^2$

$DE^2 + (\sqrt{5})^2 = (5\sqrt{2})^2$

$DE^2 + 5 = 50$

$DE^2 = 45$

$DE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

De omtrek is $3\sqrt{5} + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$.

De oppervlakte is $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 5 = 15$.

68 **a** In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$AC^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2$

$AC^2 = 12 + 16 = 28$

$AC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BD^2 + CD^2 = BC^2$

$BD^2 + 4^2 = 8^2$

$BD^2 + 16 = 64$

$BD^2 = 48$

$BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

De omtrek is $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 8 + 2\sqrt{7} = 8 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$.

De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4 = 12\sqrt{3}$.

b $AC^2 + BC^2 = 28 + 64 = 92$ en $AB^2 = (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$.

$AC^2 + BC^2 \neq AB^2$, dus $\triangle ABC$ is niet rechthoekig.

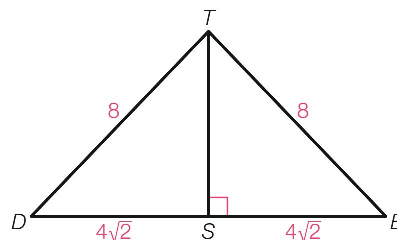
69 In $\triangle ABD$ is $\angle A = 90°$, dus $BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 8^2 + 8^2 = 128$

$BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

De omtrek is $8\sqrt{2} + 8 + 8 = 16 + 8\sqrt{2}$.

Zie de schets hiernaast.



In $\triangle BST$ is $\angle S = 90°$, dus $ST^2 + BS^2 = BT^2$

$ST^2 + (4\sqrt{2})^2 = 8^2$

$ST^2 + 32 = 64$

$ST^2 = 32$

$ST = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 16 \cdot 2 = 32$.

Bladzijde 214

70 In $\triangle CDH$ is $\angle D = 90°$, dus $CH^2 = CD^2 + DH^2$

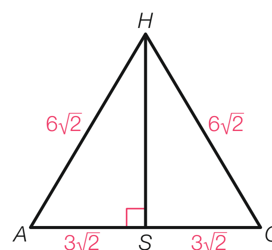
$CH^2 = 6^2 + 6^2 = 72$

$CH = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$ABCD\ EFGH$ is een kubus, dus $AH = AC = CH = 6\sqrt{2}$,

oftewel omtrek $\triangle ACH = 3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

Zie de schets hiernaast.



In $\triangle ASH$ is $\angle S = 90°$, dus $AS^2 + HS^2 = AH^2$

$(3\sqrt{2})^2 + HS^2 = 72$

$18 + HS^2 = 72$

$HS^2 = 54$

$HS = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

opp. $\triangle ACH = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} = 9\sqrt{12} = 9 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

71 $BD = AB + AD = 5\sqrt{6} + \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BC^2 = BD^2 + CD^2$
$BC^2 = (6\sqrt{6})^2 + (6\sqrt{2})^2$
$BC^2 = 216 + 72 = 288$
$BC = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot AE = 6\sqrt{2} \cdot AE$, maar ook
opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{2} = 15\sqrt{12} = 15 \cdot 2\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$.
Dus $6\sqrt{2} \cdot AE = 30\sqrt{3}$ en dit geeft $AE = \frac{30\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

L13 $\angle A = 90°$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$
$(3\sqrt{2})^2 + AC^2 = 26$
$18 + AC^2 = 26$
$AC^2 = 8$
$AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
De omtrek is $3\sqrt{2} + \sqrt{26} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{26}$.
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3 \cdot 2 = 6$.

5.6 Wortelvergelijkingen

Bladzijde 215

72 **a** $\sqrt{x} = 5$ geeft $x = 25$
$\sqrt{x} = 25$ geeft $x = 625$
$\sqrt{x - 1} = 10$ geeft $x - 1 = 100$, dus $x = 101$.
b $\sqrt{x} = -3$ heeft geen oplossing omdat de wortel van een getal nooit negatief is.

Bladzijde 216

73 Omdat de wortel van een getal nooit negatief is.

74
a $\sqrt{x} = 11$
$x = 121$

b $\sqrt{x} + 7 = 15$
$\sqrt{x} = 8$
$x = 64$

c $\sqrt{x - 2} = 9$
$x - 2 = 81$
$x = 83$

75
a $18 + 2\sqrt{x} = 10$
$2\sqrt{x} = -8$
$\sqrt{x} = -4$
geen oplossing

b $5\sqrt{x} = 6$
$\sqrt{x} = \frac{6}{5}$
$x = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

c $3 + \sqrt{3x - 2} = 5$
$\sqrt{3x - 2} = 2$
$3x - 2 = 4$
$3x = 6$
$x = 2$

d $5 - \sqrt{x} = 2$
$-\sqrt{x} = -3$
$\sqrt{x} = 3$
$x = 9$

e $\sqrt{0{,}1x + 8} = 10$
$0{,}1x + 8 = 100$
$0{,}1x = 92$
$x = 920$

f $3\sqrt{x} - 1 = 11$
$3\sqrt{x} = 12$
$\sqrt{x} = 4$
$x = 16$

76
a $\sqrt{x - 2} = 9$
$x - 2 = 81$
$x = 83$

b $7 + \sqrt{\frac{1}{3}x - 1} = 8$
$\sqrt{\frac{1}{3}x - 1} = 1$
$\frac{1}{3}x - 1 = 1$
$\frac{1}{3}x = 2$
$x = 6$

c $20 - 3\sqrt{x} = 5$
$-3\sqrt{x} = -15$
$\sqrt{x} = 5$
$x = 25$

77 **a** $x = 0$ geeft $v = \sqrt{1600 - 200 \cdot 0} = 40$
De snelheid was 40 km per uur.
b $x = 5$ geeft $v = \sqrt{1600 - 200 \cdot 5} \approx 24$
Dus de snelheid is 24 km per uur.
c $x = 4$ geeft $v = \sqrt{1600 - 200 \cdot 4} = 28{,}28\ldots$
$\frac{28{,}28\ldots - 40}{40} \cdot 100\% \approx -29{,}3\%$
Dus de snelheid is met 29,3% afgenomen.
d $v = 25$ geeft $\sqrt{1600 - 200x} = 25$
$1600 - 200x = 625$
$-200x = -975$
$x = 4{,}875$
De automobilist heeft dan 4,875 meter geremd.
e $v = 0$ geeft $\sqrt{1600 - 200x} = 0$
$1600 - 200x = 0$
$-200x = -1600$
$x = 8$
Na 8 meter staat de auto stil.

Bladzijde 217

78 **a** $t = 12{,}28$ geeft $P = \frac{29\,550}{12{,}28} - 1881{,}5 \approx 524{,}9$
Ronald heeft 524,9 punten behaald.
b $P = 959$ geeft $\frac{29\,550}{t} - 1881{,}5 = 959$
$\frac{29\,550}{t} = 2840{,}5$
$\frac{29\,550}{t} = \frac{2840{,}5}{1}$
$2840{,}5t = 29\,550$
$t = \frac{29\,550}{2840{,}5} \approx 10{,}40$
De tijd van Eelco is 10,40 seconden.
c $h = 1{,}62$ geeft $P = 2440\sqrt{1{,}62} - 2593{,}5 \approx 512{,}1$
Thomas behaalt hiermee 512,1 punten.
d $h = 1{,}69$ geeft $P = 2440\sqrt{1{,}69} - 2593{,}5 = 578{,}5$
Na het hoogspringen heeft Ronald $1850 + 578{,}5 = 2428{,}5$ punten.
Om hem voor te blijven moet Thomas meer dan $2428{,}5 - 1975 = 453{,}5$ punten halen.
$P = 453{,}5$ geeft $2440\sqrt{h} - 2593{,}5 = 453{,}5$
$2440\sqrt{h} = 3047$
$\sqrt{h} = \frac{3047}{2440}$
$h = \left(\frac{3047}{2440}\right)^2 = 1{,}559\ldots$
Dus Thomas moet minimaal 1,56 meter hoog springen.

79 **a** $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$
$(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 2) = 0$
$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -2$
$x = 16$ geen opl.
b $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$
$(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 1) = 0$
$\sqrt{x} = 5 \vee \sqrt{x} = 1$
$x = 25 \vee x = 1$
c $x - 6\sqrt{x} = 0$
$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 6) = 0$
$\sqrt{x} = 0 \vee \sqrt{x} = 6$
$x = 0 \vee x = 36$
d $6x - x\sqrt{x} = 0$
$x(6 - \sqrt{x}) = 0$
$x = 0 \vee \sqrt{x} = 6$
$x = 0 \vee x = 36$

L14 **a** $3\sqrt{x} = 18$
$\sqrt{x} = 6$
$x = 36$
b $\sqrt{x} + 7 = 5$
$\sqrt{x} = -2$
geen oplossing
c $\sqrt{x + 5} = 10$
$x + 5 = 100$
$x = 95$

Gemengde opgaven

Bladzijde 218

1 **a** $(3+2p)(3-2p)-(2p-3)^2=$
$9-4p^2-(4p^2-12p+9)=$
$9-4p^2-4p^2+12p-9=$
$-8p^2+12p$

b $-(4a-3b)(4a+3b)-3(2a-b)^2=$
$-(16a^2-9b^2)-3(4a^2-4ab+b^2)=$
$-16a^2+9b^2-12a^2+12ab-3b^2=$
$-28a^2+6b^2+12ab$

c $5(2a-3)^2-(4a)^2-4(3+a)^2=$
$5(4a^2-12a+9)-16a^2-4(9+6a+a^2)=$
$20a^2-60a+45-16a^2-36-24a-4a^2=$
$-84a+9$

d $5(p-3q)^2-3(p-3q)(5q+2p)=$
$5(p^2-6pq+9q^2)-3(5pq+2p^2-15q^2-6pq)=$
$5p^2-30pq+45q^2-15pq-6p^2+45q^2+18pq=$
$-p^2-27pq+90q^2$

2 **a** $\frac{a^2-4a-5}{a^2+2a+1}=\frac{(a+1)(a-5)}{(a+1)(a+1)}=\frac{a-5}{a+1}$

b $\frac{a+2}{a-1}-\frac{a-4}{a+3}=\frac{(a+2)(a+3)}{(a-1)(a+3)}-\frac{(a-1)(a-4)}{(a-1)(a+3)}=\frac{(a+2)(a+3)-(a-1)(a-4)}{(a-1)(a+3)}=$
$\frac{a^2+3a+2a+6-(a^2-4a-a+4)}{(a-1)(a+3)}=\frac{a^2+3a+2a+6-a^2+4a+a-4}{(a-1)(a+3)}=\frac{10a+2}{(a-1)(a+3)}$

c $\frac{x^3+3x}{2x^2+6}=\frac{x(x^2+3)}{2(x^2+3)}=\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x$

d $\frac{p^2-1}{p}\cdot\frac{3p}{p+1}=\frac{3p(p^2-1)}{p(p+1)}=\frac{3p(p+1)(p-1)}{p(p+1)}=\frac{3(p-1)}{1}=3(p-1)=3p-3$

e $\frac{4-2a}{5}:\frac{2-a}{15}=\frac{4-2a}{5}\cdot\frac{15}{2-a}=\frac{15(4-2a)}{5(2-a)}=\frac{30(2-a)}{5(2-a)}=\frac{6}{1}=6$

f $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}=\frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{x+2}{x-4}$

g $\frac{4xy^2}{2x-6}:\frac{xy}{x-3}=\frac{4xy^2}{2x-6}\cdot\frac{x-3}{xy}=\frac{4xy^2(x-3)}{xy(2x-6)}=\frac{4xy^2(x-3)}{2xy(x-3)}=\frac{2y}{1}=2y$

h $x-1-\frac{x+5}{1-x}=\frac{(x-1)(1-x)}{1-x}-\frac{x+5}{1-x}=\frac{(x-1)(1-x)-(x+5)}{1-x}=\frac{x-x^2-1+x-x-5}{1-x}=\frac{-x^2+x-6}{1-x}$

i $5+\frac{\left(\frac{8}{3x}\right)}{4}=5+\frac{\frac{8}{3x}\cdot 3x}{4\cdot 3x}=5+\frac{8}{12x}=5+\frac{2}{3x}=\frac{15x}{3x}+\frac{2}{3x}=\frac{15x+2}{3x}$

3 **a** $8+\frac{2}{2x-3}=8{,}4$
$\frac{2}{2x-3}=\frac{0{,}4}{1}$
$0{,}4(2x-3)=2$
$0{,}8x-1{,}2=2$
$0{,}8x=3{,}2$
$x=4$

b $8-\sqrt{x-3}=2$
$-\sqrt{x-3}=-6$
$\sqrt{x-3}=6$
$x-3=36$
$x=39$

c $\frac{8}{2-x}=\frac{9}{2x+6}$
$8(2x+6)=9(2-x)$
$16x+48=18-9x$
$25x=-30$
$x=-1\frac{1}{5}$

d $3\sqrt{5-4x}-1=14$
$3\sqrt{5-4x}=15$
$\sqrt{5-4x}=5$
$5-4x=25$
$-4x=20$
$x=-5$

4 **a** $x - \frac{7}{x+3} = 3$
$x - 3 = \frac{7}{x+3}$
$\frac{x-3}{1} = \frac{7}{x+3}$
$(x-3)(x+3) = 7$
$x^2 - 9 = 7$
$x^2 = 16$
$x = 4 \vee x = -4$

b $\frac{3}{\sqrt{x-1}} = 2$
$\frac{3}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{1}$
$2\sqrt{x-1} = 3$
$\sqrt{x-1} = 1\frac{1}{2}$
$x - 1 = 2\frac{1}{4}$
$x = 3\frac{1}{4}$

c $2 - \frac{1}{4-x} = \frac{x+1}{x}$
$\frac{2(4-x)}{4-x} - \frac{1}{4-x} = \frac{x+1}{x}$
$\frac{8-2x-1}{4-x} = \frac{x+1}{x}$
$\frac{7-2x}{4-x} = \frac{x+1}{x}$
$x(7-2x) = (4-x)(x+1)$
$7x - 2x^2 = 4x + 4 - x^2 - x$
$7x - 2x^2 = 3x + 4 - x^2$
$-x^2 + 4x - 4 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x-2)(x-2) = 0$
$x = 2$

d $1 + 2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 5$
$2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 4$
$\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 2$
$\frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{1}$
$4(x-1) = x + 3$
$4x - 4 = x + 3$
$3x = 7$
$x = 2\frac{1}{3}$

5 **a** $p = 6$ geeft $K = \frac{80\,000 \cdot 6}{100 - 6} \approx 5106{,}38$
Dat kost 5106,38 euro.
b $p = 98$ geeft $K = \frac{80\,000 \cdot 98}{100 - 98} = 3\,920\,000$
Dat kost 3 920 000 euro.
c Alle chemische stoffen verwijderen betekent $p = 100$.
Je mag in de formule $K = \frac{80\,000p}{100 - p}$ voor p niet 100 nemen omdat delen door 0 niet is toegestaan.
En dus lukt het niet de kosten te berekenen voor het verwijderen van al het chemisch afval.
d $K = 170\,000$ geeft $\frac{80\,000p}{100 - p} = \frac{170\,000}{1}$
$80\,000p = 170\,000(100 - p)$
$80\,000p = 17\,000\,000 - 170\,000p$
$250\,000p = 17\,000\,000$
$p = 68$
Dus 68% van de chemische stoffen kan worden verwijderd.

6 **a** $5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot 4\sqrt{2} = 5\sqrt{18} - 12\sqrt{2} = 5 \cdot 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
b $\sqrt{1\frac{7}{25}} - \frac{3}{5}\sqrt{72} = \sqrt{\frac{32}{25}} - \frac{3}{5} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} - \frac{18}{5}\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{18}{5}\sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2} - 3\frac{3}{5}\sqrt{2} = -2\frac{4}{5}\sqrt{2}$
c $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{12} - \frac{1}{3}\sqrt{48} = 3 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 1\frac{1}{3}\sqrt{3} = 4\frac{2}{3}\sqrt{3}$
d $\frac{3\sqrt{80}}{2\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{30} = \frac{3}{2}\sqrt{40} + 3\sqrt{90} = 1\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} + 3 \cdot 3\sqrt{10} = 3\sqrt{10} + 9\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$

Bladzijde 219

7 **a** $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = 6 \cdot 2 - 4\sqrt{6} + 9\sqrt{6} - 6 \cdot 3 = 12 + 5\sqrt{6} - 18 = -6 + 5\sqrt{6}$
b $(2\sqrt{5} - 6\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 12\sqrt{10} + 36 \cdot 2 = 20 - 24\sqrt{10} + 72 = 92 - 24\sqrt{10}$
c $(5\sqrt{3} - 2\sqrt{10})(5\sqrt{3} + 2\sqrt{10}) = 25 \cdot 3 - 4 \cdot 10 = 75 - 40 = 35$
d $(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6})^2 = 9 \cdot 3 + 2 \cdot 6\sqrt{18} + 4 \cdot 6 = 27 + 12 \cdot 3\sqrt{2} + 24 = 51 + 36\sqrt{2}$

8 a $\frac{p^3-4p^2}{3p^2-21p+36}=\frac{p^2(p-4)}{3(p^2-7p+12)}=\frac{p^2(p-4)}{3(p-3)(p-4)}=\frac{p^2}{3(p-3)}$

b $\frac{6a^2+36a+54}{8a^2+16a-24}=\frac{6(a^2+6a+9)}{8(a^2+2a-3)}=\frac{6(a+3)(a+3)}{8(a-1)(a+3)}=\frac{3(a+3)}{4(a-1)}=\frac{3a+9}{4(a-1)}$

9 a Bij 5 februari om 12:00 uur hoort $t = 4{,}5$. Dit geeft $d = 2+\sqrt{13\cdot 4{,}5}\approx 9{,}6$.
Dus de ijsdikte was 9,6 cm.

b Bij 13 februari om 18:00 uur hoort $t = 12\frac{3}{4}$.
$t=12\frac{3}{4}$ geeft $d=2+\sqrt{13\cdot 12\frac{3}{4}}=14{,}87\ldots$
Dus het ijs is minder dan 15 cm dik geweest.

c $d = 12$ geeft $2+\sqrt{13t}=12$
$\sqrt{13t}=10$
$13t=100$
$t=7{,}69\ldots$
Dus op 8 februari was het ijs 12 cm dik.

d $d=2+\sqrt{13t}=2+\sqrt{13}\cdot\sqrt{t}=2+3{,}605\ldots\cdot\sqrt{t}$
Dus $a\approx 3{,}61$.

10 a $(a+2b+3)(a-3)=$
$a^2-3a+2ab-6b+3a-9=$
$a^2+2ab-6b-9$

b $\frac{5}{\sqrt{3}}-2\sqrt{27}=$
$\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-2\cdot 3\sqrt{3}=$
$\frac{5\sqrt{3}}{3}-6\sqrt{3}=$
$\frac{5}{3}\sqrt{3}-6\sqrt{3}=-4\frac{1}{3}\sqrt{3}$

c $4(x-2)^3-(4x)^3=$
$4(x-2)(x-2)^2-64x^3=$
$(4x-8)(x^2-4x+4)-64x^3=$
$4x^3-16x^2+16x-8x^2+32x-32-64x^3=$
$-60x^3-24x^2+48x-32$

d $\frac{4}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{1}{5}}=$
$\frac{4\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$
$\frac{4\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=$
$\frac{4}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}=\sqrt{5}$

e $3\sqrt{1\frac{2}{3}}-5\sqrt{\frac{3}{5}}=$
$3\sqrt{\frac{5}{3}}-5\sqrt{\frac{3}{5}}=$
$\frac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$
$\frac{3\sqrt{15}}{3}-\frac{5\sqrt{15}}{5}=$
$\sqrt{15}-\sqrt{15}=0$

f $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=$
$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=$
$\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=$
$\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

11 a $(p+q-2)(p-q)^2=$
$(p+q-2)(p^2-2pq+q^2)=$
$p^3-2p^2q+pq^2+p^2q-2pq^2+q^3-2p^2+4pq-2q^2=$
$p^3-p^2q-pq^2+q^3-2p^2+4pq-2q^2$

b $(a+1)^4=$
$(a+1)^2(a+1)^2=$
$(a^2+2a+1)(a^2+2a+1)=$
$a^4+2a^3+a^2+2a^3+4a^2+2a+a^2+2a+1=$
$a^4+4a^3+6a^2+4a+1$

12 **a** $x^2 - 3 = 6x$
$x^2 - 6x - 3 = 0$
$(x-3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x-3)^2 = 12$
$x - 3 = \sqrt{12} \vee x - 3 = -\sqrt{12}$
$x = 3 + 2\sqrt{3} \vee x = 3 - 2\sqrt{3}$

b $2x^2 + 4x = 8$
$2x^2 + 4x - 8 = 0$
$x^2 + 2x - 4 = 0$
$(x+1)^2 - 1 - 4 = 0$
$(x+1)^2 = 5$
$x + 1 = \sqrt{5} \vee x + 1 = -\sqrt{5}$
$x = -1 + \sqrt{5} \vee x = -1 - \sqrt{5}$

c $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$
$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$
$(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{4} = 0$
$(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{13}{16}$
$x - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{13}{16}} \vee x - \frac{1}{4} = -\sqrt{\frac{13}{16}}$
$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{16}} \vee x = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{16}}$
$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \vee x = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}$
$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13} \vee x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13}$

13 In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$
$(3\sqrt{6})^2 + CD^2 = (6\sqrt{2})^2$
$54 + CD^2 = 72$
$CD^2 = 18$
$CD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{6} + \sqrt{6}) \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BC^2 = BD^2 + CD^2$
$BC^2 = (\sqrt{6})^2 + 18$
$BC^2 = 6 + 18 = 24$
$BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
omtrek $\triangle ABC = 3\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

14 In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$
$(3\sqrt{6})^2 + CD^2 = (6\sqrt{2})^2$
$54 + CD^2 = 72$
$CD^2 = 18$
$CD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD)\\ \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle D \text{ (in } \triangle ACD) \ (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD$ (hh)

AB	AC	BC	geeft	AB	$6\sqrt{2}$	BC
AC	AD	CD		$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$

$$AB = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{36 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{72\sqrt{6}}{18} = 4\sqrt{6}$$

$$BC = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{18 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{36\sqrt{6}}{18} = 2\sqrt{6}$$

opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
omtrek $\triangle ABC = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

Alternatieve uitwerking
In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$
$(3\sqrt{6})^2 + CD^2 = (6\sqrt{2})^2$
$54 + CD^2 = 72$
$CD^2 = 18$
$CD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
Omdat $\angle C = 90°$ in $\triangle ABC$ volgt uit de *hpq*-stelling dat $CD^2 = BD \cdot AD$
$(3\sqrt{2})^2 = BD \cdot 3\sqrt{6}$
$9 \cdot 2 = BD \cdot 3\sqrt{6}$
$18 = BD \cdot 3\sqrt{6}$

$$BD = \frac{18 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{18} = \sqrt{6}$$

In $\triangle BCD$ is $\angle D = 90°$, dus $BC^2 = BD^2 + CD^2$
$BC^2 = (\sqrt{6})^2 + 18$
$BC^2 = 6 + 18 = 24$
$BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{6} + \sqrt{6}) \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

omtrek $\triangle ABC = 3\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$

Diagnostische toets

Bladzijde 222

1 **a** $(a-9)(a+9) =$
$a^2 - 81$

b $(2a-3b)^2 =$
$4a^2 - 12ab + 9b^2$

c $(x+3)^2 + (2x+1)(2x-1) =$
$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 1 =$
$5x^2 + 6x + 8$

d $(2a+b)^2 - (2a-b)^2 =$
$4a^2 + 4ab + b^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) =$
$4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 =$
$8ab$

2 **a** $3a(a+6)^2 - (6a)^2 =$
$3a(a^2 + 12a + 36) - 36a^2 =$
$3a^3 + 36a^2 + 108a - 36a^2 =$
$3a^3 + 108a$

b $4(3x-5)^2 - 9(2x+1)(2x-1) =$
$4(9x^2 - 30x + 25) - 9(4x^2 - 1) =$
$36x^2 - 120x + 100 - 36x^2 + 9 =$
$-120x + 109$

3 **a** $(x+3y)(3-x+y) =$
$3x - x^2 + xy + 9y - 3xy + 3y^2 =$
$3x - x^2 - 2xy + 9y + 3y^2$

b $(x+4)^3 =$
$(x+4)^2(x+4) =$
$(x^2 + 8x + 16)(x+4) =$
$x^3 + 4x^2 + 8x^2 + 32x + 16x + 64 =$
$x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

4 **a** $x^2 + 14x - 2 =$
$(x+7)^2 - 49 - 2 =$
$(x+7)^2 - 51$

b $x^2 + 5 = 8x$
$x^2 - 8x + 5 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + 5 = 0$
$(x-4)^2 = 11$
$x - 4 = \sqrt{11} \vee x - 4 = -\sqrt{11}$
$x = 4 + \sqrt{11} \vee x = 4 - \sqrt{11}$

5 **a** $\frac{8a^2 - 16a}{2a} = \frac{8a(a-2)}{2a} = \frac{4(a-2)}{1} = 4(a-2) = 4a - 8$

b $\frac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{x-2}$

c $\frac{t^2 + 10t + 25}{t^2 + 4t - 5} = \frac{(t+5)(t+5)}{(t-1)(t+5)} = \frac{t+5}{t-1}$

6 **a** $\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+2) - (x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)} =$
$\frac{x^2 - 4 - (x^2 + x - 4x - 4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{x^2 - 4 - x^2 - x + 4x + 4}{(x-4)(x+2)} = \frac{3x}{(x-4)(x+2)}$

b $\frac{a+1}{3} \cdot \frac{2a^2}{a^2 + a} = \frac{2a^2(a+1)}{3(a^2 + a)} = \frac{2a^2(a+1)}{3a(a+1)} = \frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$

c $\frac{n+2}{2n-2} : \frac{n+1}{n-1} = \frac{n+2}{2n-2} \cdot \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+2)(n-1)}{(2n-2)(n+1)} = \frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$

d $\frac{8}{\left(\frac{3}{a}\right)} = \frac{8 \cdot a}{\frac{3}{a} \cdot a} = \frac{8a}{3} = \frac{8}{3}a = 2\frac{2}{3}a$

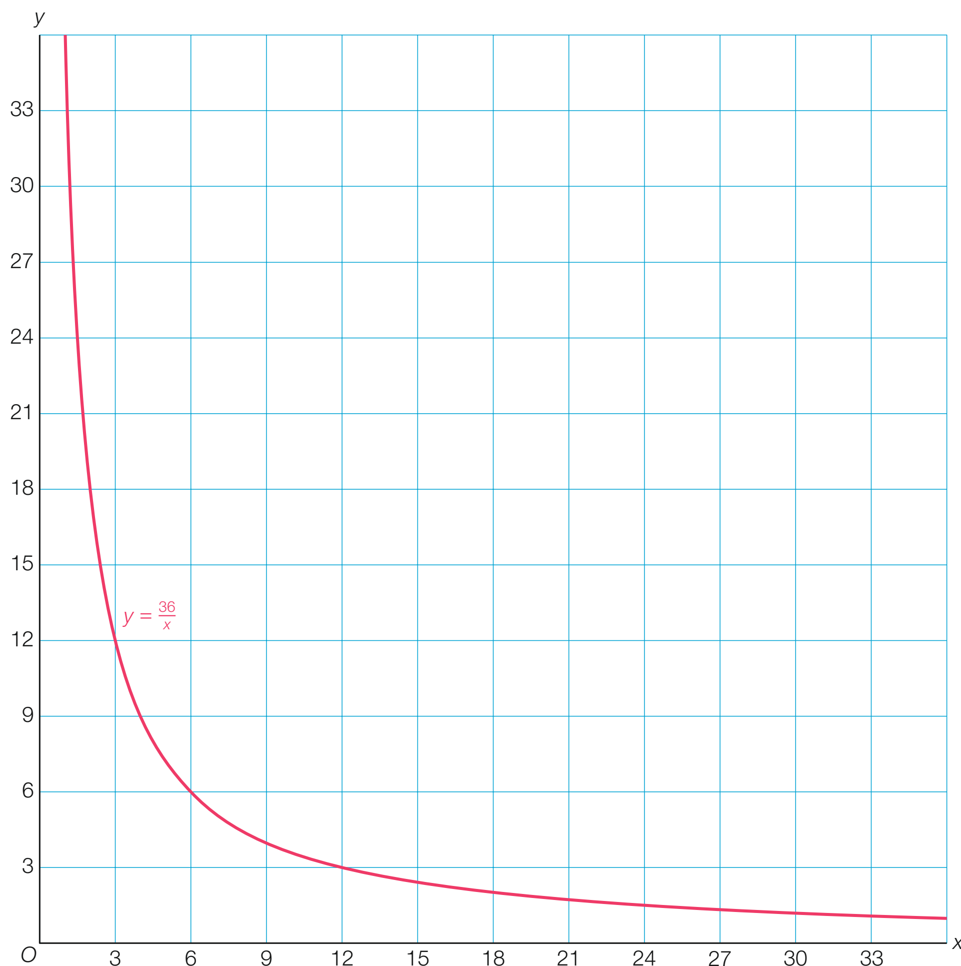
e $x - 3 - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-3)(x-1)-(x-2)}{x-1} =$
$\frac{x^2 - x - 3x + 3 - x + 2}{x-1} = \frac{x^2 - 5x + 5}{x-1}$

f $\frac{\left(\frac{4}{5x}\right)}{6} = \frac{\frac{4}{5x} \cdot 5x}{6 \cdot 5x} = \frac{4}{30x} = \frac{2}{15x}$

7 **a** $xy = 36$, dus $y = \frac{36}{x}$.

b

x	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y	36	18	12	9	6	4	3	2	1



c Als x vier keer zo groot wordt, wordt y vier keer zo klein.
d Als x een heel klein getal is, dan is y een heel groot getal.

8 **a** $\frac{3}{x+2} = \frac{5}{x-4}$
$5(x+2) = 3(x-4)$
$5x + 10 = 3x - 12$
$2x = -22$
$x = -11$

b $18 + \frac{10}{4 - 0{,}1x} = 68$
$\frac{10}{4 - 0{,}1x} = \frac{50}{1}$
$50(4 - 0{,}1x) = 10$
$200 - 5x = 10$
$-5x = -190$
$x = 38$

c $50 - \frac{6x}{x-8} = 42\frac{1}{2}$
$-\frac{6x}{x-8} = -7\frac{1}{2}$
$\frac{6x}{x-8} = \frac{15}{2}$
$15(x-8) = 2 \cdot 6x$
$15x - 120 = 12x$
$3x = 120$
$x = 40$

Bladzijde 223

9 **a** $t = 28$ geeft $N = 3600 - \frac{1200}{2 + 0{,}1 \cdot 28} = 3350$

Dus 3350 insecten.

b $N = 3475$ geeft $3600 - \frac{1200}{2 + 0{,}1t} = 3475$

$-\frac{1200}{2 + 0{,}1t} = -125$

$\frac{1200}{2 + 0{,}1t} = \frac{125}{1}$

$125(2 + 0{,}1t) = 1200$

$250 + 12{,}5t = 1200$

$12{,}5t = 950$

$t = 76$

Dus na 76 dagen zijn er 3475 insecten.

10 **a** $3\sqrt{80} - 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} = 3 \cdot 4\sqrt{5} - 5\sqrt{45} = 12\sqrt{5} - 5 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 15\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$

b $\frac{6\sqrt{80}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{200} = 3\sqrt{40} - \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 3 \cdot 2\sqrt{10} - 5\sqrt{2} = 6\sqrt{10} - 5\sqrt{2}$

c $5\sqrt{1\frac{7}{25}} - 3\sqrt{8} = 5\sqrt{\frac{32}{25}} - 3 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{32}}{\sqrt{25}} - 6\sqrt{2} = \frac{5 \cdot 4\sqrt{2}}{5} - 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

d $3\sqrt{7\frac{1}{9}} - (2\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{\frac{64}{9}} - 4 \cdot 2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} - 8 = 3 \cdot \frac{8}{3} - 8 = 8 - 8 = 0$

11 **a** $\frac{3}{\sqrt{6}} - \sqrt{24} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} - 2\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}}{6} - 2\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = -1\frac{1}{2}\sqrt{6}$

b $\sqrt{10\frac{2}{3}} - \sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{96}}{3} - \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

c $\sqrt{\frac{1}{6}} + \frac{5}{6}\sqrt{24} = \frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} + \frac{5}{6} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{10}{6}\sqrt{6} = \frac{1}{6}\sqrt{6} + \frac{10}{6}\sqrt{6} = \frac{11}{6}\sqrt{6} = 1\frac{5}{6}\sqrt{6}$

12 In $\triangle ACD$ is $\angle D = 90°$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$AD^2 + (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{15})^2$

$AD^2 + 12 = 60$

$AD^2 = 48$

$AD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

In $\triangle ABD$ is $\angle D = 90°$, dus $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$AB^2 = 48 + (3\sqrt{3})^2$

$AB^2 = 48 + 27 = 75$

$AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

opp. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 10 \cdot 3 = 30$

omtrek $\triangle ABC = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{15} = 10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}$

13 **a** $12 + \sqrt{2x - 3} = 21$

$\sqrt{2x - 3} = 9$

$2x - 3 = 81$

$2x = 84$

$x = 42$

b $12 + \sqrt{1 - x} = 10$

$\sqrt{1 - x} = -2$

geen oplossing

c $180 - 5\sqrt{x} = 60$

$-5\sqrt{x} = -120$

$\sqrt{x} = 24$

$x = 576$

d $15\sqrt{x} - 21 = 204$

$15\sqrt{x} = 225$

$\sqrt{x} = 15$

$x = 225$

14 **a** $r = 10$ geeft $v = 3{,}5\sqrt{5 \cdot 10} \approx 24{,}7$
Dus de bijbehorende veilige snelheid is 24,7 km per uur.
b $v = 21$ geeft $3{,}5\sqrt{5r} = 21$
$\sqrt{5r} = 6$
$5r = 36$
$r = 7{,}2$
Dus de straal van de bocht is 7,2 meter.

Herhaling

Bladzijde 224

1 **a** $(a + 5)(a - 5) = a^2 - 25$
b $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$
c $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
d $(4x - 3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$
e $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$
f $(3a + b)^2 + (a - 2b)^2 =$
$9a^2 + 6ab + b^2 + a^2 - 4ab + 4b^2 =$
$10a^2 + 2ab + 5b^2$

2 **a** $3(2x + 5)^2 =$
$3(4x^2 + 20x + 25) =$
$12x^2 + 60x + 75$
b $-2(3a + 1)(3a - 1) =$
$-2(9a^2 - 1) =$
$-18a^2 + 2$
c $2(x - 1)(2x + 3) - 4(x + 1)^2 =$
$2(2x^2 + 3x - 2x - 3) - 4(x^2 + 2x + 1) =$
$4x^2 + 6x - 4x - 6 - 4x^2 - 8x - 4 =$
$-6x - 10$
d $3(2p + 1)^2 - 6(2p + 3)(1 - p) =$
$3(4p^2 + 4p + 1) - 6(2p - 2p^2 + 3 - 3p) =$
$12p^2 + 12p + 3 - 12p + 12p^2 - 18 + 18p =$
$24p^2 + 18p - 15$

3 **a** $(x + 2)(x + y - 3) =$
$x^2 + xy - 3x + 2x + 2y - 6 =$
$x^2 + xy - x + 2y - 6$
b $(7a + b)(a - 4b + 1) =$
$7a^2 - 28ab + 7a + ab - 4b^2 + b =$
$7a^2 - 27ab + 7a - 4b^2 + b$
c $(n - 1)(n + 3)^2 =$
$(n - 1)(n^2 + 6n + 9) =$
$n^3 + 6n^2 + 9n - n^2 - 6n - 9 =$
$n^3 + 5n^2 + 3n - 9$
d $(3p - 1)^3 =$
$(3p - 1)^2(3p - 1) =$
$(9p^2 - 6p + 1)(3p - 1) =$
$27p^3 - 9p^2 - 18p^2 + 6p + 3p - 1 =$
$27p^3 - 27p^2 + 9p - 1$

4 **a** $x^2 - 4x + 1 =$
$(x - 2)^2 - 4 + 1 =$
$(x - 2)^2 - 3$
b $x^2 + 12x + 40 =$
$(x + 6)^2 - 36 + 40 =$
$(x + 6)^2 + 4$
c $x^2 + 40x + 60 =$
$(x + 20)^2 - 400 + 60 =$
$(x + 20)^2 - 340$
d $x^2 - 6x =$
$(x - 3)^2 - 9$

Bladzijde 225

5 **a** $x^2 + 6x - 4 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 - 4 = 0$
$(x + 3)^2 = 13$
$x + 3 = \sqrt{13} \vee x + 3 = -\sqrt{13}$
$x = -3 + \sqrt{13} \vee x = -3 - \sqrt{13}$
b $x^2 + 10x - 1 = 0$
$(x + 5)^2 - 25 - 1 = 0$
$(x + 5)^2 = 26$
$x + 5 = \sqrt{26} \vee x + 5 = -\sqrt{26}$
$x = -5 + \sqrt{26} \vee x = -5 - \sqrt{26}$
c $x^2 - 2x + 3 = 0$
$(x - 1)^2 - 1 + 3 = 0$
$(x - 1)^2 = -2$
geen oplossing
d $x^2 + 2 = 8x$
$x^2 - 8x + 2 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + 2 = 0$
$(x - 4)^2 = 14$
$x - 4 = \sqrt{14} \vee x - 4 = -\sqrt{14}$
$x = 4 + \sqrt{14} \vee x = 4 - \sqrt{14}$

6 a $\frac{a^2-2a-3}{2a-6}=\frac{(a+1)(a-3)}{2(a-3)}=\frac{a+1}{2}=\frac{1}{2}(a+1)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

b $\frac{3p+15}{p^2-25}=\frac{3(p+5)}{(p-5)(p+5)}=\frac{3}{p-5}$

c $\frac{x^2+9x+8}{x^2-4x-5}=\frac{(x+1)(x+8)}{(x+1)(x-5)}=\frac{x+8}{x-5}$

7 a $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)}+\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{2x+6+x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}$

b $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}-\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)-x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=$

$\frac{x^2-1-x^2+2x}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$

c $x-\frac{x+3}{x-5}=\frac{x(x-5)}{x-5}-\frac{x+3}{x-5}=\frac{x(x-5)-(x+3)}{x-5}=\frac{x^2-5x-x-3}{x-5}=\frac{x^2-6x-3}{x-5}$

8 a $\frac{4x^2}{x-3}:\frac{2x}{x-3}=\frac{4x^2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{2x}=\frac{4x^2(x-3)}{2x(x-3)}=\frac{2x}{1}=2x$

b $\frac{2x+2}{3}:\frac{x+1}{5x}=\frac{2x+2}{3}\cdot\frac{5x}{x+1}=\frac{5x(2x+2)}{3(x+1)}=\frac{10x(x+1)}{3(x+1)}=\frac{10x}{3}=\frac{10}{3}x=3\frac{1}{3}x$

c $\frac{3}{2p-6}\cdot\frac{p-3}{12p}=\frac{3(p-3)}{12p(2p-6)}=\frac{3(p-3)}{24p(p-3)}=\frac{1}{8p}$

9 a $\frac{10}{\left(\frac{2}{3x}\right)}=\frac{10\cdot 3x}{\frac{2}{3x}\cdot 3x}=\frac{30x}{2}=15x$

b $\frac{\left(\frac{4}{5x}\right)}{2}=\frac{\frac{4}{5x}\cdot 5x}{2\cdot 5x}=\frac{4}{10x}=\frac{2}{5x}$

c $\frac{4}{\left(\frac{6}{5x}\right)}=\frac{4\cdot 5x}{\frac{6}{5x}\cdot 5x}=\frac{20x}{6}=\frac{20}{6}x=\frac{10}{3}x=3\frac{1}{3}x$

Bladzijde 226

10 a Hij doet er $\frac{24}{12}=2$ uur over.

b De rit duurt $\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$ uur.

c $t=\frac{24}{v}$

d Als v heel klein wordt, wordt t heel groot.
Als de snelheid van Bas heel laag is, zal hij er heel lang over doen.

11 a $\frac{7}{x-3}=\frac{4}{x-6}$
$7(x-6)=4(x-3)$
$7x-42=4x-12$
$3x=30$
$x=10$

b $5+\frac{3}{2x-6}=5\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2x-6}=\frac{1}{2}$
$2x-6=6$
$2x=12$
$x=6$

c $\frac{5-3x}{2x+1}=\frac{1}{8}$
$2x+1=8(5-3x)$
$2x+1=40-24x$
$26x=39$
$x=1\frac{1}{2}$

d $72-\frac{10x}{5-0{,}2x}=-3$
$-\frac{10x}{5-0{,}2x}=-75$
$\frac{10x}{5-0{,}2x}=\frac{75}{1}$
$10x=75(5-0{,}2x)$
$10x=375-15x$
$25x=375$
$x=15$

12 **a** $t = 15$ geeft $N = 12\,000 - \dfrac{5000}{1 + 0{,}2 \cdot 15} = 10\,750$

Dus 10 750 insecten.

b $12\,000 - \dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = 11\,500$

$-\dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = -500$

$\dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = \dfrac{500}{1}$

$500(1 + 0{,}2t) = 5000$

$500 + 100t = 5000$

$100t = 4500$

$t = 45$

Dus na 45 dagen zijn er 11 500 insecten.

c $12\,000 - \dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = 11\,750$

$-\dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = -250$

$\dfrac{5000}{1 + 0{,}2t} = \dfrac{250}{1}$

$250(1 + 0{,}2t) = 5000$

$250 + 50t = 5000$

$50t = 4750$

$t = 95$

Dus na 95 dagen zijn er 11 750 insecten.

Bladzijde 227

13 **a** $(2\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 20 - 21 = -1$

b $7\sqrt{3} \cdot -2\sqrt{5} = -14\sqrt{15}$

c $\dfrac{20\sqrt{90}}{5\sqrt{10}} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$

d $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

e $\sqrt{60} - \sqrt{15} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{15} = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} = \sqrt{15}$

f $\sqrt{40} - \sqrt{1\tfrac{1}{9}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{\tfrac{10}{9}} = 2\sqrt{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = 2\sqrt{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10} - \tfrac{1}{3}\sqrt{10} = 1\tfrac{2}{3}\sqrt{10}$

g $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$

h $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{32} = \sqrt{50} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$

i $\dfrac{2\sqrt{72}}{6\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{24} + \sqrt{6} = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6} = \tfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = \tfrac{2}{3}\sqrt{6} + \sqrt{6} = 1\tfrac{2}{3}\sqrt{6}$

14 **a** $\dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$

b $\dfrac{24}{3\sqrt{6}} = \dfrac{24 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{24\sqrt{6}}{3 \cdot 6} = \dfrac{24\sqrt{6}}{18} = \tfrac{24}{18}\sqrt{6} = \tfrac{4}{3}\sqrt{6} = 1\tfrac{1}{3}\sqrt{6}$

c $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

d $\sqrt{1\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$

e $\dfrac{7}{\sqrt{7}} + \sqrt{\tfrac{1}{7}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} + \dfrac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \dfrac{7\sqrt{7}}{7} + \dfrac{\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7} + \tfrac{1}{7}\sqrt{7} = 1\tfrac{1}{7}\sqrt{7}$

f $\sqrt{11\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{45}{4}} = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{5} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$

g $\sqrt{3\frac{1}{5}} + \frac{1}{10}\sqrt{20} = \sqrt{\frac{16}{5}} + \frac{1}{10} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

h $\frac{2}{\sqrt{8}} - \sqrt{4\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{2\sqrt{8}}{8} - \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{8} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

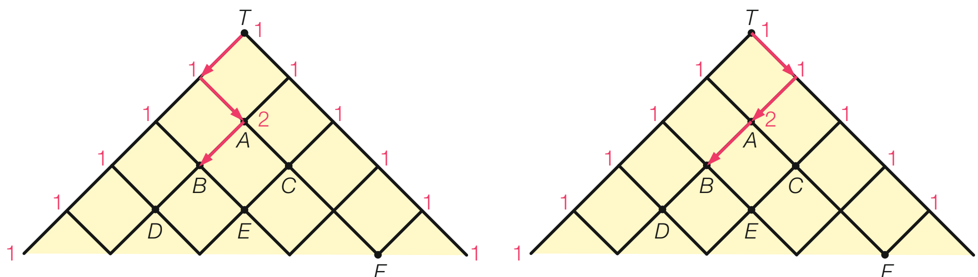
15 **a** $\angle P = 90°$, dus $PQ^2 + PR^2 = QR^2$
$(2\sqrt{6})^2 + PR^2 = (4\sqrt{2})^2$
$24 + PR^2 = 32$
$PR^2 = 8$
$PR = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
b omtrek $\triangle PQR = 2\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$
c opp. $\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{12} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

16 **a** $\sqrt{x} = 25$
$x = 625$
b $\sqrt{3x+1} = 7$
$3x + 1 = 49$
$3x = 48$
$x = 16$
c $2 + \sqrt{x} = 16$
$\sqrt{x} = 14$
$x = 196$
d $16 + \sqrt{x} = 2$
$\sqrt{x} = -14$
geen oplossing
e $15 + \sqrt{2x+3} = 18$
$\sqrt{2x+3} = 3$
$2x + 3 = 9$
$2x = 6$
$x = 3$
f $3 + 2\sqrt{0{,}1x - 8} = 9$
$2\sqrt{0{,}1x - 8} = 6$
$\sqrt{0{,}1x - 8} = 3$
$0{,}1x - 8 = 9$
$0{,}1x = 17$
$x = 170$

Onderzoek De driehoek van Pascal

Bladzijde 228

1 **a**



Er zijn drie kortste routes om vanuit *T* naar *B* te komen, dus bij *B* hoort het getal 3.
b Bij *C* hoort 3 en bij *D* hoort 4.
c Je kunt op drie manieren zonder omwegen van *T* naar *B* of *C*.
Zonder omwegen van *T* naar punt *E* gaat via *B* of *C*.
Dus er zijn in totaal 3 + 3 = 6 kortste routes van *T* naar *E*.
d Er zijn vijf kortste routes van *T* naar punt *F*.

2 **a, b**
som rij 1 is $2 = 2^1$
som rij 2 is $4 = 2^2$
som rij 3 is $8 = 2^3$
som rij 4 is $16 = 2^4$
som rij 5 is $32 = 2^5$
som rij 6 is $64 = 2^6$
b Er geldt steeds som $= 2^{\text{nummer rij}}$.
Dus som van de getallen in rij 20 is $2^{20} = 1\,048\,576$.

Bladzijde 229

3 **a** In rij 4 kun je het getal 14 641 lezen.
b Het getal is steeds $11^{\text{nummer rij}}$.
c De regelmaat geeft $11^5 = 161\,051$ en dat is niet 15 101 051.
d 11^5
e $11^6 = 1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 15 \cdot 10^4 + 20 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 1 = 1\,771\,561$

4 **a** $(a+b)(\mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3) = \begin{cases} \mathbf{1}a^4 + \mathbf{3}a^3b + \mathbf{3}a^2b^2 + \mathbf{1}ab^3 \\ \quad \mathbf{1}a^3b + \mathbf{3}a^2b^2 + \mathbf{3}ab^3 + \mathbf{1}b^4 \end{cases}$ +

$\mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$

b $(a+b)(\mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4) = \begin{cases} \mathbf{1}a^5 + \mathbf{4}a^4b + \mathbf{6}a^3b^2 + \mathbf{4}a^2b^3 + \mathbf{1}ab^4 \\ \quad \mathbf{1}a^4b + \mathbf{4}a^3b^2 + \mathbf{6}a^2b^3 + \mathbf{4}ab^4 + \mathbf{1}b^5 \end{cases}$ +

$\mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5$

c De getallen van de herleiding van $(a+b)^4$ die voor elke term staan optellen zoals in het schema, is hetzelfde als telkens de som nemen van de getallen van twee termen die naast elkaar staan. Je krijgt zo de getallen in de herleiding van $(a+b)^5$.
De getallen in een rij van de driehoek van Pascal krijg je ook door telkens de som te nemen van twee naast elkaar gelegen getallen uit de vorige rij.
d Van elke term is de som van de exponenten van a en b steeds 5. De eerste term heeft alleen maar een macht van a, en de termen daarna telkens een macht van b erbij. De exponent van de macht van a neemt per volgende term steeds 1 af, en de exponent van de macht van b neemt bij elke volgende term 1 toe.

5 **a** Met de zesde rij van de driehoek van Pascal krijg je
$(2x-1)^6 = 1 \cdot (2x)^6 + 6 \cdot (2x)^5 \cdot (-1)^1 + 15 \cdot (2x)^4 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot (2x)^3 \cdot (-1)^3 + 15 \cdot (2x)^2 \cdot (-1)^4 +$
$6 \cdot (2x)^1 \cdot (-1)^5 + 1 \cdot (-1)^6 = 64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 60x^2 - 12x + 1$
b De zevende rij van de driehoek van Pascal is: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7.
Dit geeft $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.
c $(1+1)^5 = 1 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 1^1 + 10 \cdot 1^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^1 \cdot 1^4 + 1 \cdot 1^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
$\left.\begin{array}{l}(1+1)^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \\ (1+1)^5 = 2^5\end{array}\right\} 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$
Hier staat dat de som van getallen in rij 5 van de driehoek van Pascal gelijk is aan 2^5 en dat is precies wat je in opgave 2 hebt gevonden.
d $(10+1)^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 1^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 = 121$
$(10+1)^3 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1^1 + 3 \cdot 10^1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = 1331$
$(10+1)^4 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 \cdot 1^1 + 6 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 10^1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1^4 =$
$1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 = 14\,641$
$(10+1)^5 = 1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 \cdot 1^1 + 10 \cdot 10^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 10^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 10^1 \cdot 1^4 + 1 \cdot 1^5 =$
$1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 = 161\,051$
Hierboven is $(10+1)^n = 11^n$ met behulp van de getallen in de n-de rij van de driehoek van Pascal berekend, en die uitkomst is gelijk aan het getal dat je in opgave 3 krijgt bij het omzetten van de n-de rij naar een getal.

Algemene vaardigheden

Bladzijde 230

1 **Probleem A**
Ja, dat is mogelijk. Bijvoorbeeld als volgt.
De getallen 1, 4, 5 en 8 in de eerste groep. Dit geeft $1 + 4 + 5 + 8 = 18$.
De getallen 2, 3, 6 en 7 in de tweede groep. Dit geeft $2 + 3 + 6 + 7 = 18$.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat twee even hoge torens op hetzelfde neerkomt als twee groepen getallen met dezelfde som. Dus Leo kan de oplossing van probleem A gebruiken om de volgende twee torens te maken.
De kubussen met ribben 1, 4, 5 en 8 cm vormen de eerste toren.
Dit geeft een hoogte van $1 + 4 + 5 + 8 = 18$ cm.
De kubussen met ribben 2, 3, 6 en 7 cm vormen de tweede toren.
Dit geeft een hoogte van $2 + 3 + 6 + 7 = 18$ cm.

Bladzijde 231

2 **Probleem A**
Ja, dat kan. Bijvoorbeeld als volgt.
De getallen 1, 6, 7 en 12 in de eerste groep. Dit geeft $1 + 6 + 7 + 12 = 26$.
De getallen 2, 5, 8 en 11 in de tweede groep. Dit geeft $2 + 5 + 8 + 11 = 26$.
De getallen 3, 4, 9 en 10 in de derde groep. Dit geeft $3 + 4 + 9 + 10 = 26$.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat de getallen 1 tot en met 12 overeenkomen met de ribben 3, 6, 9, …, 36 cm waarbij telkens met 3 is vermenigvuldigd. Dus Noa kan de oplossing van probleem A gebruiken om de volgende drie torens te maken.
De kubussen met ribben 3, 18, 21 en 36 cm vormen de eerste toren.
Dit geeft een hoogte van $3 + 18 + 21 + 36 = 78$ cm.
De kubussen met ribben 6, 15, 24 en 33 cm vormen de tweede toren.
Dit geeft een hoogte van $6 + 15 + 24 + 33 = 78$ cm.
De kubussen met ribben 9, 12, 27 en 30 cm vormen de derde toren.
Dit geeft een hoogte van $9 + 12 + 27 + 30 = 78$ cm.

3 **Probleem A**
Hendrik heeft de volgende groepen gemaakt.
De getallen 1 en 10 in de eerste groep. Dit geeft $1 + 10 = 11$.
De getallen 2 en 9 in de tweede groep. Dit geeft $2 + 9 = 11$.
De getallen 3 en 8 in de derde groep. Dit geeft $3 + 8 = 11$.
De getallen 4 en 7 in de vierde groep. Dit geeft $4 + 7 = 11$.
De getallen 5 en 6 in de vijfde groep. Dit geeft $5 + 6 = 11$.
Dus $1 + 2 + \ldots + 9 + 10 = 5 \cdot 11 = 55$.
Hendrik krijgt de uitkomst 55.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat de som van de getallen 1 tot en met 100 op dezelfde manier kan worden berekend als de som van de getallen 1 tot en met 10.
Dat gaat als volgt.
$1 + 100 = 101$
$2 + 99 = 101$
$\vdots$
$49 + 52 = 101$
$50 + 51 = 101$
Dat zijn 50 getallenparen waarbij de som telkens 101 is.
Dus $1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$.

4 **Probleem A**
Ajax won of speelde gelijk in $34 - 3 = 31$ wedstrijden.
Stel x is het aantal keer gelijkspel. Dan is het aantal gewonnen wedstrijden $31 - x$.
Het totale aantal punten is 83. Dit geeft $3(31 - x) + x = 83$

$$93 - 3x + x = 83$$
$$93 - 2x = 83$$
$$-2x = -10$$
$$x = 5$$

Dus Ajax speelde vijf keer gelijk.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat het aantal punten voor winnen, gelijkspel en verliezen hetzelfde is.
Elk team speelt 7 wedstrijden. Dat zijn $8 \cdot 7 = 56$ wedstrijden. Maar dan zijn alle wedstrijden dubbel geteld, dus in dit sportoernooi worden er $56 : 2 = 28$ wedstrijden gespeeld.
Elke wedstrijd heeft een winnaar en een verliezer (in totaal 3 punten), of twee gelijkspelers (in totaal 2 punten).
Stel x is het aantal wedstrijden dat in een gelijkspel eindigt. Dan is het aantal gewonnen/verloren wedstrijden $28 - x$.
Het totale aantal punten is 61. Dit geeft $3(28 - x) + 2x = 61$

$$84 - 3x + 2x = 61$$
$$84 - x = 61$$
$$-x = -23$$
$$x = 23$$

Dus er zijn 23 wedstrijden die in een gelijkspel eindigden. En dus $28 - 23 = 5$ gewonnen/verloren wedstrijden. Als de winnaar deze allemaal heeft gewonnen, zijn dat $5 \cdot 3 = 15$ behaalde punten. Worden de overige twee wedstrijden gelijkgespeeld, dan geeft dat in totaal $15 + 2 = 17$ punten.
Dus de winnaar kan maximaal 17 punten hebben behaald.

5 **Probleem A**
a Speler 2 wint door door alle acht lucifers van de andere stapel te pakken.
b Speler 2 neemt in haar eerste beurt zeven lucifers van de andere stapel. Beide stapels hebben dan nog een lucifer. Speler 1 moet een van deze lucifers pakken. Speler twee wint in haar tweede beurt door de lucifer van de andere stapel te pakken.
c Speler 2 wint door telkens hetzelfde aantal lucifers te pakken als speler 1, maar dan van de andere stapel. Oftewel telkens het aantal lucifers in elke stapel gelijk maken.

Bladzijde 232
Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat een geldstuk op een schaakbord naar links of naar beneden schuiven overeenkomt met lucifers van de ene of van de andere stapel pakken. Het geldstuk op veld H8 komt overeen met acht lucifers in elke stapel, dezelfde beginsituatie als bij probleem A. Het geldstuk op veld A1 schuiven komt overeen met de laatste lucifer pakken.
Dus speler 2 wint door het geldstuk telkens evenveel vakjes te schuiven als speler 1, maar dan in de andere richting. Oftewel door telkens het geldstuk op de diagonaal (A1 tot en met H8) te schuiven.

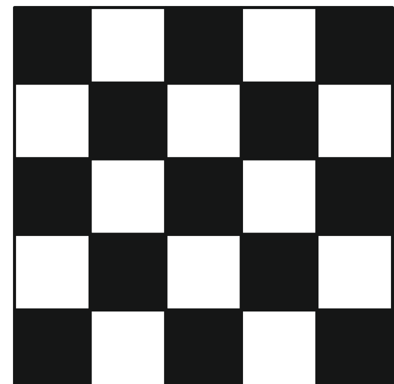
6 **Probleem A**
a Speler 1 wint door telkens het aantal lucifers in beide stapels gelijk te maken.
Speler 1 zit dan in dezelfde situatie als speler 2 in probleem A van opgave 5.
De winnende strategie is hetzelfde.
b Speler 1 gebruikt hier dezelfde strategie als in vraag a, met de volgende uitzonderingen:
- Als speler 2 in één van beide stapels geen lucifers overgelaten heeft, dan pakt speler 1 van de andere stapel zodat daar één lucifer overblijft.
- Als speler 2 in één van beide stapels nog maar een lucifer overgelaten heeft, dan pakt speler 1 alle lucifers van de andere stapel.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat een geldstuk op een schaakbord naar links of naar beneden schuiven overeenkomt met lucifers van de ene of van de andere stapel pakken. Het geldstuk op veld A8 tot en met G8 leggen komt overeen met acht lucifers in de ene stapel en één tot en met zeven lucifers in de andere stapel. Het geldstuk op veld A1 schuiven komt overeen met de laatste lucifer pakken. Speler 2 begint met schuiven, dus dit is de situatie van probleem A vraag b.
Dus speler 2 wint door telkens het geldstuk op de diagonaal (A1 tot en met H8) te schuiven, met de volgende uitzonderingen:

- Als speler 1 het geldstuk in kolom A of rij 1 gelegd of geschoven heeft, dan schuift speler 2 het geldstuk op veld A2 of B1.
- Als speler 1 het geldstuk in kolom B of rij 2 gelegd of geschoven heeft, dan schuift speler 2 het geldstuk op veld B1 of A2.

7 **Probleem A**
Elke dominosteen bedekt een zwart en een wit veld. Op een volledig schaakbord zijn er evenveel zwarte als witte velden. Omdat de verwijderde velden A8 en H1 allebei zwart zijn, lukt het dus nooit om het schaakbord volledig met dominostenen te bedekken.

Probleem B
Dit probleem is verwant met probleem A, omdat de rangschikking van de geldstukken overeenkomt met een schaakbord (met 25 velden).
Zie hiernaast. Victor springt altijd naar een aangrenzend geldstuk, wat overeenkomt met het springen van een zwart naar een wit veld of andersom.
Omdat er een oneven aantal velden zijn, zal Victor altijd op dezelfde kleur moeten eindigen als waarop hij begon.
Hiernaast zijn er meer zwarte dan witte velden. Dus als Victor op een wit veld begint, dan kan hij nooit op een wit veld eindigen.
Dus het lukt Victor niet altijd om een route te vinden.



Verantwoording

Beeld
Illustraties: Oscar Casander, Arnhem; Bianca van Loon, Heemstede
Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Cartografie: Van Oort redactie en kartografie, Almere

Colofon
Omslagontwerp: Shootmedia, Groningen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 23